Fiche d'exercices **MPSI 3** - 2004/2005
Thème : Applications **Chapitre : 1**

Sauf mention contraire, les lettres $E, F, ...$ désignent des ensembles quelconques. Les exercices de cette fiche portent sur les notions suivantes : définition d'une application ; composition ; image directe ou réciproque d'une partie ; injection, surjection, bijection.

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par $f(x) = \sin x$ et $g(x) = x^2$ pour tout réel x. Ecrire $f \circ g$ et $g \circ f$. Ces deux applications sont-elles égales ? Sont-elles périodiques ?

---

2. Etudier si les applications suivantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont injectives, surjectives, bijectives :
   (a) $x \mapsto \sin x$ (b) $x \mapsto x^3$ (c) $x \mapsto e^x$ (d) $x \mapsto x \sin x$

---

3. *Soit A une partie fixée de E.
   (a) A quelle condition l'application $f : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(A)$ définie par $f(X) = X \cap A$ est-elle injective ? Montrer que f est toujours surjective.
   (b) A quelle condition l'application $f : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E)$ définie par $f(X) = X \cup A$ est-elle injective ? à quelle condition est-elle surjective ?

---

4. *Soient $f : E \to F$, $g : F \to G$, $h : G \to H$ des applications. Montrer que si $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives, f, g, h le sont aussi.

---

5. **Soit $f : E \to F$. Montrer les équivalences suivantes :
   (a) f surjective $\Longleftrightarrow \forall B \in \mathcal{P}(F)$, $f(f^{-1}(B)) = B$
   (b) f injective $\Longleftrightarrow \forall A \in \mathcal{P}(E)$, $f^{-1}(f(A)) = A$
   (c) f injective $\Longleftrightarrow \forall (A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$, $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$
   (d) f bijective $\Longleftrightarrow \forall A \in \mathcal{P}(E)$, $\overline{f(A)} = f(\bar{A})$ $(\bar{A} = E \setminus A)$

---

6. (a) **Soient $f : E \to F$, $g : F \to G$, $h : G \to E$ trois applications. Prouver que si deux des applications $h \circ g \circ f$, $g \circ f \circ h$, $f \circ h \circ g$ sont injectives (resp. surjectives) et la troisième surjective (resp. injective), alors f, g, h sont toutes trois bijectives.
   (b) ***On va généraliser cela. Soient $A_1, ..., A_n$ des ensembles $f_i : A_i \to A_{i+1}$ des applications (f_n va de A_n dans A_1 : on lit les indices modulo n). On pose pour tout i, $F_i = f_{i-1} \circ f_{i-2} \circ ... \circ f_1 \circ f_n \circ f_{n-1} \circ ... \circ f_i$. Quel est le domaine de départ et d'arrivée de F_i ? On suppose qu'il existe une partition de $[\![1, n]\!]$ en deux ensembles I et S tels que si $i \in I$, F_i est injective et si $i \in S$, F_i est surjective. Montrer que toutes les applications f_i sont bijectives.

---

7. ****Régularité à droite et à gauche.**
   On répond ici à la question : quand peut-on "simplifier" dans une composition ?
   (a) Soit $f : F \to G$ une application injective. Montrer que :
   $$\forall (g, h) \in \mathcal{F}(E, F)^2, \quad f \circ g = f \circ h \Longrightarrow g = h$$
   (b) Réciproquement, montrer que si $f : F \to G$ satisfait la propriété ci-dessus, alors f est injective.

(c) Soit $f : E \to F$ une application surjective. Montrer que :

$$\forall (g,h) \in \mathcal{F}(F,G)^2, \quad g \circ f = h \circ f \Longrightarrow g = h$$

(d) Etudier aussi la réciproque.