Fiche d'exercices — MPSI 3 - 2004/2005
Thème : Espaces vectoriels, généralités — Chapitre : 13

Sauf précision contraire $\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif, et E un espace vectoriel non nul sur le corps $\mathbb{K}$.

1. Parmi les ensembles suivants lesquels sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

   (a) L'ensemble des suites réelles convergentes.
   (b) L'ensemble des suites qui convergent vers 0.
   (c) L'ensemble des suites qui convergent vers 1.
   (d) L'ensemble des suites qui divergent.
   (e) L'ensemble des suites bornées.
   (f) L'ensemble des suites croissantes.
   (g) L'ensemble des suites monotones.

---

2. Parmi les ensembles suivants lesquels sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$?

   (a) L'ensemble des fonctions dérivables en 0.
   (b) L'ensemble des fonctions bornées sur $\mathbb{R}$.
   (c) L'ensemble des fonctions uniformément continues sur $\mathbb{R}$.
   (d) L'ensemble des fonctions lipschitziennes.
   (e) L'ensemble des fonctions paires.
   (f) L'ensemble des fonctions convexes.
   (g) L'ensemble des fonctions qui admettent une limite finie en $+\infty$.

---

3. **Commutant d'un endomorphisme.**

   Soit $u \in L(E)$. Montrer que $C_u = \{v \in L(E),\ v \circ u = u \circ v\}$ est une sous-algèbre de $L(E)$. C'est par définition le *commutant* de u.

---

4. **Réunion de sous-espaces vectoriels.**

   (a) Soient U, V, W trois sous-espaces vectoriels de E tels que $U \subset V \cup W$. Prouver que soit $U \subset V$ soit $U \subset W$. A quelle condition la réunion de deux sous-espaces vectoriels de E est-elle est un sous-espace vectoriel ? *Tout cela a déjà été vu pour les groupes. Il ne s'agit donc ici que d'un cas particulier.*

   (b) Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille non vide de sous-espaces vectoriels de E vérifiant la propriété suivante : $\forall (i,j) \in I^2$, $\exists k \in I$, $F_i \cup F_j \subset F_k$. Montrer que $F = \bigcup_{i\in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

---

5. **Théorie vectorielle des corps.**

   (a) Soit $\mathbb{L}$ un surcorps de $\mathbb{K}$. Montrer que pour les lois ambiantes, $\mathbb{L}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

   (b) ***Soient $\mathbb{K} \subset \mathbb{L} \subset \mathbb{M}$ trois corps. On suppose donnée une base $(e_i)_{i\in I}$ du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{L}$ et une base $(f_j)_{j\in J}$ du $\mathbb{L}$-espace vectoriel $\mathbb{M}$. Montrer que la famille $(e_i f_j)_{(i,j)\in I\times J}$ est une base de $\mathbb{M}$ en tant que $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

   Ce résultat, appelé théorème de la base téléscopique, est fondamental en théorie des corps.

---

6. ****Liberté d'une famille de vecteurs.**

   (a) Soit (x, y, z) une famille libre de E. La famille $(x + y, x + z, y + z)$ est-elle libre ?

   (b) Si $(u_1, ..., u_n) \in E^n$, $n \geqslant 2$, est une famille libre de E, en est-il de même de la famille

$$(u_1 + u_2, u_2 + u_3, ..., u_n + u_1) \text{ ?}$$

---

7. **On regarde $\mathbb{R}$ comme un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel.

   (a) Montrer que la famille $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$ est libre.

   (b) En déduire qu'un cercle de $\mathbb{R}^2$ de centre $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ et de rayon $R > 0$ possède au plus un point à coordonnées rationnelles.

---

8. ***Caractérisation des bases d'un plan vectoriel.**

   Montrer que les vecteurs (a, b) et (c, d) de $\mathbb{K}^2$ forment une base de $\mathbb{K}^2$ si et seulement si $ad - bc \neq 0$.

   Cela sera généralisé dans le cours sur les déterminants.

---

9. ****Un petit lemme important.**

   Soit $u \in L(E)$ telle que $\forall x \in E$, $(x, u(x))$ est liée. Montrer que u est une homothétie.

---

10. ****Liberté d'une famille de vecteurs propres.**

    Soit $u \in L(E)$, $\lambda_1, ..., \lambda_p$ des scalaires deux à deux distincts et $x_1, ..., x_p$ des vecteurs non nuls tels que pour tout i, $u(x_i) = \lambda_i x_i$. Montrer que la famille $(x_1, ..., x_p)$ est libre.

---

11. *****Famille des puissances d'une application à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.**

    (a) Soient $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n$ des nombres réels deux à deux distincts et $a_1, ..., a_n$ des réels non tous nuls. A l'aide du théorème de Rolle, prouver par récurrence sur n que la fonction

$$x > 0 \longmapsto a_1 x^{\alpha_1} + \cdots + a_n x^{\alpha_n}$$

    possède au plus $n - 1$ zéros distincts dans $\mathbb{R}_+^*$.

    (b) En déduire que si $f : A \to \mathbb{R}_+^*$ prend une infinité de valeurs (A ensemble non vide quelconque) alors la famille $\{f^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}\}$ est libre dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{F}(A, \mathbb{R})$.

    (c) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un singleton. Etudier la liberté de la famille des restrictions à I des applications $x \longmapsto e^{\alpha x}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

---

12. **Polynômes trigonométriques pairs.**

    Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On pose $F = \text{Vect }(x \longmapsto \cos nx)_{n \geqslant 0}$ et $G = \text{Vect }(x \longmapsto \cos^n x)_{n \geqslant 0}$.

    (a) Montrer que $F = G$.

    (b) **Les familles $(x \longmapsto \cos nx)_{n \geqslant 0}$ et $(x \longmapsto \cos^n x)_{n \geqslant 0}$ sont-elles des bases de $F = G$?

---

13. *****Liberté d'une famille de fonctions.**

    Soit $\alpha > 0$, $\alpha \notin 2\mathbb{N}$. Pour tout réel a on note f_a l'application définie sur $\mathbb{R}$ par $f_a(x) = |x - a|^\alpha$. Montrer que la famille $(f_a)_{a \in \mathbb{R}}$ est libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

---

14. **Endomorphismes nilpotents.**

Soit $u \in L(E)$. On suppose que u est nilpotent, c'est-à-dire qu'il existe un entier $p \geqslant 2$ tel que $u^p = 0$ et $u^{p-1} \neq 0$.

   (a) Montrer que $u^k \neq 0$ pour $1 \leqslant k < p$.

   (b) **Montrer qu'il existe un vecteur x de E tel que la famille $(x, u(x), ..., u^{p-1}(x))$ soit libre.

   (c) *Montrer que la famille $(id, u, u^2, ..., u^{p-1})$ est libre dans $L(E)$.

   (d) **Montrer que $\mathrm{Id} - u$ est un automorphisme de E.

---

15. ***Petits exos sur noyau et image.**

   (a) Soit $u \in L(E)$. Montrer que $\mathrm{Ker}\ u = \mathrm{Ker}\ u^2$ si et seulement si $\mathrm{Ker}\ u \cap \mathrm{Im}\ u = \{0\}$.

   (b) Soit $(f, g) \in L(E)^2$. Montrer que $f(\mathrm{Ker}\ (g \circ f)) = \mathrm{Ker}\ g \cap \mathrm{Im}\ f$.

   (c) Soient u, v deux endomorphismes de E qui commutent. Montrer que les sous-espaces $\mathrm{Ker}\ u$ et $\mathrm{Im}\ u$ sont stables par v.

---

16. ****Le shift.**

Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'espace des suites réelles. On considère l'application S de E dans E qui à $u = (u_n)_{n \geqslant 0}$ associe la suite $Su = (u_{n+1})_{n \geqslant 0}$.

   (a) Montrer que S est un endomorphisme de E. Préciser $\mathrm{Ker}\ S$ et $\mathrm{Im}\ S$.

   (b) Montrer que $(\mathrm{Ker}\ S^k)_{k \geqslant 1}$ est une suite strictement croissante de sous-espaces de E. Que vaut la réunion $\displaystyle\bigcup_{k \geqslant 1} \mathrm{Ker}\ S^k$?

   (c) Quel est le sous-espace $\mathrm{Ker}\ (S^p - \mathrm{Id})$ pour $p \in \mathbb{N}$?

---

17. ****Dérivation discrète.** Soit E l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour $f \in E$, on note $\Delta(f)$ l'application définie pour tout réel x par $\Delta(f)(x) = f(x+1) - f(x)$.

   (a) Montrer que $\Delta \in L(E)$. Quel est son noyau?

   (b) Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall f \in E$, $\forall x \in \mathbb{R}$: $\displaystyle\Delta^n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^{n-k} f(x+k)$.

   (c) Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, $f \in E$ et $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle f(x+n) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \Delta^k(f)(x)$.

---

18. **Indépendance des caractères d'un groupe.** Soit G un groupe.

   (a) Rappeler comment $\mathbb{C}^G$, l'ensemble des applications de G dans $\mathbb{C}$, est muni d'une structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

   (b) ***Soient χ_1,...,χ_n des morphismes de groupes distincts de G dans le groupe multiplicatif $(\mathbb{C}^*, \times)$ (ce sont des *caractères* de G). Montrer que les χ_i sont linéairement indépendants.
