Fiche d'exercices
Thème : Logique

MPSI 3 - 2004/2005
Chapitre : 1

1. Un ensemble d'axiomes constitue une théorie. Une théorie T est dite *contradictoire* si à partir des axiomes de T et des règles de la logique on parvient à montrer qu'une assertion A est à la fois vraie et fausse. Montrer (en utilisant l'implication) que dans une théorie contradictoire toute assertion est alors vraie et fausse.

   Dans une théorie contradictoire on perd donc toute notion de vérité. On ne sait pas si notre théorie des Mathématiques est ou non contradictoire ! Pire encore : le second théorème d'incomplétude de Gödel dit en gros qu'on ne peut pas le savoir...

---

2. (a) Montrer que l'implication logique est transitive : $[(A \Longrightarrow B) \text{ et } (B \Longrightarrow C)] \Longrightarrow (A \Longrightarrow C)$.
   (b) Montrer que $[A \Longrightarrow B] \Longrightarrow [(C \Longrightarrow A) \Longrightarrow (C \Longrightarrow B)]$.
   (c) Les assertions $A \Longrightarrow (B \Longrightarrow C)$ et $(A \Longrightarrow B) \Longrightarrow C$ sont-elles équivalentes ?

---

3. *Vous voulez acheter un billet de loterie. Le buraliste, logicien à ses heures perdues, vous en présente cinq numérotés de 1 à 5 et vous déclare :

   - si 5 est perdant, alors 1 est gagnant
   - si 4 est perdant, alors 2 est gagnant
   - si 3 est perdant, alors 5 aussi
   - si 1 est gagnant, alors 2 aussi
   - si 3 est gagnant, alors 4 est perdant

   Quel billet choisissez-vous ?

---

4. Ecrire la négation des propositions suivantes :

   (a) $\forall (x, y) \in G^2$, $xy = yx$.
   (b) $\exists x \in G$, $\forall y \in G$, $xy = yx$.
   (c) $\forall (a, b) \in A^2$, $ab = 0 \Longrightarrow (a = 0 \text{ ou } b = 0)$.
   (d) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0$, $\forall y \in \mathbb{R}$, $|x - y| < \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.
   (e) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant N \Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

   Le sens de toutes ces propositions sera clair plus tard. Il est important de savoir nier une assertion pour les raisonnements par contraposition ou par l'absurde.

---

5. Quelle est la contraposée des implications suivantes ?

   (a) si $x > 0$ alors $f(x) \leqslant 0$
   (b) si f est inversible alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \neq 0$
   (c) si f est continue et si I est un segment, alors f est bornée sur I
   (d) si $ab = 0$ alors $(a = 0 \text{ ou } b = 0)$

---

6. **Sachant que $\sqrt{30} \notin \mathbb{Q}$, montrer que $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$.

---

7. *Soit $A(x,y)$ une assertion dépendant de deux variables x et y. Montrer que l'une des propositions suivantes implique la seconde :

   (i) $\exists x, \forall y,\ A(x,y)$

   (ii) $\forall y, \exists x,\ A(x,y)$.

   Prouver à l'aide d'un contre-exemple que l'implication réciproque est fausse.

   Les quantificateurs $\forall$ et $\exists$ ne commutent donc pas : attention à la syntaxe ! En revanche, on peut écrire indifféremment $\forall x, \forall y, A(x,y)$ ou $\forall y, \forall x, A(x,y)$ et de même avec le quantificateur existentiel.

---

8. *Soit $P(x)$ et $Q(x)$ deux propositions dépendant d'une variable x qui décrit un ensemble E. Soit $A = \{x \in E,\ P(x)\}$ et $B = \{x \in E,\ Q(x)\}$. Comment se traduisent sur A et B les propositions suivantes ?

   (a) $\forall x \in E,\ P(x) \Longrightarrow Q(x)$ (b) $\forall x \in E,\ P(x) \Longleftrightarrow Q(x)$ (c) $\forall x \in E,\ Q(x) \Longleftrightarrow \neg P(x)$

   (d) $\forall x \in E,\ P(x)$ ou $Q(x)$ (e) $\forall x \in E,\ (\neg P(x))$ ou $(\neg Q(x))$.

---

9. (a) Soit $A(x)$ et $B(x)$ deux propriétés qui dépendent d'une variable x. Quelle(s) implication(s) y a-t-il entre les assertions

   (i) $\forall x, (A(x)$ ou $B(x))$

   (ii) $(\forall x,\ A(x))$ ou $(\forall x,\ B(x))$

   (b) **Voici un exemple concret où justement il ne faut pas utiliser l'implication inexistante ci-dessus. On cherche les isométries de $\mathbb{R}$ qui fixent 0. On se donne donc $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $|f(x) - f(y)| = |x - y|$ pour tout couple $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $f(0) = 0$. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)| = |x|$ et donc que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x$ ou $f(x) = -x$. Il s'agit d'une assertion de la forme (i) ci-dessus et on ne peut pas en déduire (ii) dans le cas général comme on vient de le voir. Prouver toutefois que dans la situation qui nous occupe on a bien : soit $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x$, soit $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = -x$. *On vient donc de montrer que les seules isométries de $\mathbb{R}$ qui fixent l'origine sont l'identité et la symétrie centrale. Le lecteur pourra en déduire la détermination de toutes les isométries de $\mathbb{R}$...*

10. Expliquer en français ce que signifient les assertions quantifiées suivantes et écrire leur négation.

    (a) $\forall (x,y) \in \mathbb{Q}^2,\ x < y \Longrightarrow \exists z \in \mathbb{Q},\ x < z < y$.

    (b) $\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ u_n < u_{n+1}$ (où (u_n) est une suite réelle).

    (c) $\exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leqslant A$ (où f est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).

---

11. *On considère le connecteur logique de Sheffer $\diamondsuit$ défini par : $A \diamondsuit B \Longleftrightarrow \neg(A \wedge B)$. Exprimer la négation, la conjonction, la disjonction, l'implication et l'équivalence en utilisant uniquement le connecteur $\diamondsuit$.
