Fiche d'exercices — MPSI 3 - 2004/2005
Thème : Lois de composition internes — Chapitre : 1

L'objectif est de travailler les notions essentielles liées aux lois de composition internes : associativité, commutativité, élément neutre, éléments symétrisables,...

1. *Soit $*$ la loi de composition interne sur $\mathbb{Q}$ définie par : $a * b = a + b + ab$
   (a) Associativité, commutativité, élément neutre de la loi $*$?
   (b) Quels sont les éléments inversibles, réguliers, idempotents (i.e. tels que $x * x = x$)?
   (c) Résoudre les équations $7 * x = 3$, $x * (-5) = -1$, $x * x = 2$, $x * x = 3$.
   (d) Calculer pour a inversible et $n \in \mathbb{Z}$, a^n (il s'agit des puissances au sens de la loi $*$).

---

2. Soit $*$ une loi sur un ensemble E.
   (a) Montrer que si e est un élément neutre à gauche et e' un élément neutre à droite, alors $e = e'$. En déduire que si $*$ admet un élément neutre celui-ci est unique.
   (b) On suppose maintenant que $*$ admet un neutre e et est associative. Soit $a \in E$. On suppose que a admet un symétrique à gauche b (i.e. $b * a = e$) et un symétrique à droite c (i.e. $a * c = e$). Montrer que $b = c$ et donc que a est symétrisable. Y a-t-il alors d'autres symétriques à droite ou à gauche en dehors de $b = c = a^{-1}$?
   (c) **Donner un exemple d'une loi associative admettant un neutre pour laquelle il existe un élément ayant au moins deux symétriques à gauche (et donc aucun à droite d'après la question précédente !). Même question en échangeant gauche et droite.

---

3. *Soit E un ensemble muni d'une loi $*$ associative. On suppose que E admet un élément neutre à gauche, noté e, (c'est-à-dire que : $\forall a \in E,\ e * a = a$) et que pour tout élément a de E il existe $b \in E$ tel que $b * a = e$.
   (a) Soit $a \in E$ tel que $a * a = a$. Montrer que $a = e$.
   (b) Soit $a \in E$ et b tel que $b * a = e$. Montrer que $a * b = e$.
   (c) Montrer que e est aussi élément neutre à droite (i.e. $\forall a \in E,\ a * e = a$).

   L'ensemble E est alors muni d'une structure de groupe.

---

4. ***E est un ensemble muni d'une loi associative $*$ vérifiant : $\forall a \in E,\ \forall y \in E,\ \exists x \in E,\ y = a * x * a$. Montrer que la loi $*$ admet un élément neutre.

---

5. ***__Le monoïde $\mathcal{F}(E, E)$.__ Soit E un ensemble ayant au moins deux éléments. On sait que la composition $\circ$ est une loi de composition interne sur l'ensemble $\mathcal{F}(E, E)$ des applications de E dans E. Cette loi est associative et admet un élément neutre : l'application identité Id_E. On dit que $(\mathcal{F}(E, E), \circ)$ est un monoïde. On le note M pour simplifier.
   (a) M est-il commutatif ? Déterminer son centre, c'est-à-dire $\{f \in M,\ \forall g \in M,\ f \circ g = g \circ f\}$.
   (b) Montrer que les éléments symétrisables à gauche (resp. à droite) sont les applications injectives (resp. surjectives).
   (c) En déduire que f est inversible dans M si et seulement si f est bijective.
   (d) Déterminer les éléments de M réguliers à droite (resp. à gauche). *C'est un exercice qui figure sur la fiche applications.*

---

6. ***Soit E un ensemble fini muni d'une loi de composition interne associative, notée multiplicativement. Montrer qu'il existe x appartenant à E tel que $x^2 = x$. *(Oral X 1997)*

---

7. **Soit E un ensemble non vide muni d'une loi de composition interne $\perp$ qui vérifie les propriétés suivantes : pour tout $(x, y, z) \in E^3$,

   (i) $x \perp x = y \perp y$, (ii) $(x \perp z) \perp (y \perp z) = x \perp y$, (iii) $x \perp (x \perp y) = y$.

   On choisit de noter 0 l'élément de E égal à $x \perp x$ pour tout x. On définit alors une nouvelle loi de composition interne $*$ sur E par $x * y = x \perp (0 \perp y)$.

   (a) Donner sur $E = \mathbb{Z}$ un exemple très simple d'une loi $\perp$ vérifiant les propriétés (i), (ii) et (iii). Préciser alors la loi $*$ qui lui est associée. *Dans la suite on se replace dans le cadre général.*
   (b) Montrer que $*$ admet un élément neutre que l'on précisera.
   (c) Montrer que tout x de E est symétrisable pour $*$ et préciser son symétrique x^{-1}. Si $(x, y) \in E^2$, quel est le symétrique de $x \perp y$?
   (d) Montrer que pour $(x, y, z) \in E^3$, $x \perp (y \perp z) = (x \perp y) \perp z^{-1}$. En déduire que $*$ est une loi associative.
   (e) Montrer que $*$ est commutative.

---

8. *__Régularité dans un monoïde fini.__

   Soit M un monoïde fini et $a \in M$. Montrer qu'il y a équivalence entre les points suivants :

   (i) a est régulier à droite

   (ii) a est régulier à gauche

   (iii) a est symétrisable à gauche

   (iv) a est symétrisable à droite

   On utilisera le fait suivant qui sera démontré dans le cours sur les ensembles finis : si E est fini et si f est une application injective de E dans E, alors f est bijective. Cette propriété est d'ailleurs caractéristique des ensembles finis.
