Sauf mention contraire, $\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif quelconque et E, F des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.

1. Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, P l'ensemble des fonctions paires et I l'ensemble des fonctions impaires. Montrer que ce sont des sous-espaces vectoriels de E et que $E = P \oplus I$.

2. Dans $E = C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ donner un supplémentaire du sous-espace F des fonctions qui s'annulent en 0.

3. *Soit F, G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $F + G = E$. Si F' est un supplémentaire de $F \cap G$ dans F , montrer que $F' \oplus G = E$.

4. **On suppose que $E = F \oplus G$.
 - (a) Soit u, u' deux endomorphismes de E . Montrer que si $u|_F = u'|_F$ et $u|_G = u'|_G$ alors $u = u'$.
 - (b) Soit $v \in L(F)$ et $w \in L(G)$. Montrer qu'il existe un unique endomorphisme u de E tel que $u|_F = v$ et $u|_G = w$._____
5. *Soient E, F deux espaces vectoriels. On suppose qu'il existe $u \in L(E, F)$ et $v \in L(F, E)$ tels que $u \circ v = \text{Id}_F$. Montrer que $v \circ u$ est un projecteur de E . Préciser son image et son noyau.

6. **Soient E, F deux K -espaces vectoriels et soient $f \in L(E, F)$ et $g \in L(F, E)$ telles que $f \circ g \circ f = f$ et $g \circ f \circ g = g$. Montrer que $E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } g$ et $F = \text{Ker } g \oplus \text{Im } f$.

7. Soit $f_1 = (1, 2)$ et $f_2 = (-1, 1)$ vecteurs de $\mathbb{R}^2$, D_1 la droite engendré par f_1 et D_2 la droite engendrée par f_2 . Montrer que $D_1 \oplus D_2 = \mathbb{R}^2$. Pour $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ déterminer le projeté de x sur D_1 parallèlement à D_2 .

8. **On suppose ici que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Soient p, q deux projecteurs de E .
 - (a) Montrer que $p + q$ est un projecteur si et seulement si $pq = qp = 0$.
 - (b) Si cela est réalisé déterminer $\text{Ker } (p + q)$ et $\text{Im } (p + q)$ en fonction des noyaux et images de p et q ._____
9. *Soient p, q deux projecteurs distincts non nuls de E . Montrer que (p, q) est libre dans $L(E)$.

10. **Soit p un projecteur de E .
 - (a) Soit $u \in L(E)$. Montrer que u et p commutent si et seulement si $\text{Ker } p$ et $\text{Im } p$ sont stables par u .
 - (b) Quels sont les sous-espaces stables par p ?
 - (c) Soit q un autre projecteur de E . Trouver une condition nécessaire et suffisante sur les noyaux et images de p et q pour que p et q commutent._____
11. **Soient p, q deux projecteurs de E tels que $\text{Im } p \subset \text{Ker } q$. Soit $r = p + q - pq$. Montrer que r est un projecteur et trouver son image et son noyau.
_____ (Oral Polytechnique)