Les exercices suivants concernent la structure d'espace affine. Conformément au programme on suppose que le corps de base est $\mathbb{R}$ et on se contente d'étudier la structure d'espace affine d'un espace vectoriel réel E . Ce n'est pas très restrictif, dans la mesure où le choix d'une origine dans un espace affine quelconque permet de vectorialiser celui-ci. On trouvera les exercices classiques de géométrie affine réelle plane dans une fiche ultérieure.

1. Vérifier que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $(E) \ y'' + ay' + by = g$, où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et g est une application continue sur un intervalle I , est un plan affine dirigé par l'espace vectoriel des solutions de l'équation homogène associée à (E) .

On se rend bien compte qu'il n'y a pas "d'origine naturelle" dans ce plan affine : il n'y a pas en général de solution de (E) plus particulière que les autres. Ce plan affine "vit" bien entendu dans l'espace vectoriel des fonctions de classe C^2 sur I .

2. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que l'ensemble des solutions du système $AX = B$ est soit vide, soit un sous-espace affine de $\mathbb{R}^n$ dont on précisera la direction.

3. Soit D une droite affine de $M_n(\mathbb{R})$. Montrer que $D \cap O_n(\mathbb{R})$ possède au plus deux éléments.

4. Soient $\mathcal{F} = a + F$ et $\mathcal{G} = b + G$ deux sous-espaces affines de E . On suppose que les sous-espaces vectoriels F et G sont supplémentaires. Montrer que $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est un singleton.

5. Quelles sont les applications affines de $\mathbb{R}^n$ qui commutent avec toutes les translations ?

6. Soit f une application affine de E . Montrer que l'ensemble des points fixes de f est soit vide, soit un sous-espace affine dont on précisera la direction.

7. Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$. On se donne $u \in \mathcal{L}(E)$ et on suppose qu'il existe un hyperplan affine H ne passant pas par 0 tel que $u(H) \subset H$. Montrer que u admet un point fixe non nul. (Centrale)

8. Caractériser les applications affines f de E vérifiant la propriété suivante : tout point M de E est le milieu de $f(M)$ et de $f(f(M))$.

9. Soit G un sous-groupe fini du groupe affine $GA(E)$. Montrer qu'il existe un point M invariant par tous les éléments de G . On pourra considérer l'isobarycentre de la famille $(f(A))_{f \in G}$ où A est un point quelconque de E . (Oral Mines)

10. Soit A, B, C, D quatre points de E . On considère l'ensemble des milieux de tous les segments formés à partir de ces points. Montrer que cet ensemble admet un centre de symétrie. (Oral X)

11. Soit E un espace euclidien. Montrer que l'ensemble des translations t_x avec $\|x\| = 1$ engendre $T(E)$ le groupe des translations de E .