

1. **Centre d'un anneau.** Soit A un anneau non nul. Montrer que $Z(A) = \{x \in A, \forall y \in A, xy = yx\}$ est un sous-anneau de A . C'est par définition le *centre* de A .
-

2. ***Anneau des applications d'un ensemble dans un anneau.**

Soit A un anneau non nul et X un ensemble non vide quelconque.

- (a) Montrer que $\mathcal{F}(X, A)$ est muni d'une structure d'anneau pour les lois $+$ et $\cdot$ définies par :

$$\forall (f, g) \in \mathcal{F}(X, A)^2, \quad \forall x \in X, \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x) \text{ et } (f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$$

- (b) A quelle condition cet anneau est-il intègre ?

- (c) On suppose que A est un corps, par exemple $A = \mathbb{R}$. Quels sont les éléments inversibles et les diviseurs de 0 de $\mathcal{F}(X, A)$?

- (d) On prend $A = \mathbb{R}$ et $X = I$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $C^k(I, \mathbb{R})$ est un sous-anneau de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.
-

3. **Anneau $\mathbb{Z}^2$.** On munit $\mathbb{Z}^2$ de sa structure d'anneau produit. On rappelle que les lois $+$ et $\times$ sont définies par $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$ et $(x, y) \times (x', y') = (xx', yy')$.

- (a) Quels sont les diviseurs de 0, les éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}^2$?

- (b) **Trouver tous les morphismes d'anneaux de $\mathbb{Z}^2$ dans $\mathbb{Z}$. On pourra s'intéresser aux images de $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$ par un tel morphisme.

- (c) ***Déterminer les sous-anneaux de $\mathbb{Z}^2$.
-

4. ****Calcul dans un anneau.**

Soit A un anneau non nul et $(a, b) \in A^2$. On suppose que $ab + ba = 1$ et $a^2b + ba^2 = a$. Montrer que $a^2b = ba^2$ et que $2aba = a$. Prouver que a est inversible et trouver son inverse.

5. ******Condition suffisante de commutativité.**

Montrer qu'un anneau A tel que $yx \in \{xy, -xy\}$ pour tout $(x, y) \in A^2$ est commutatif. (Oral Ulm)

6. ***Soit A un anneau, pas nécessairement commutatif, a, b deux éléments de A . Montrer que si $1 - ab$ est inversible, alors $1 - ba$ aussi. (Oral Ulm)
-

7. ****Soit A un anneau. Un élément $a \in A$ est dit inversible à droite s'il existe b tel que $ab = 1$. On dit que a est un diviseur de 0 à droite si il existe $c \neq 0$ tel que $ac = 0$. On définit les mêmes notions à gauche. On rappelle que a est dit inversible s'il l'est à gauche et à droite : dans ce cas il y a un unique inverse à droite et un unique inverse à gauche tous deux égaux (c'est par définition l'inverse de a).

- (a) Montrer que si a est inversible à droite il ne peut pas être diviseur de 0 à gauche.

- (b) Donner un exemple montrant que a peut être inversible à droite et diviseur de 0 à droite.

- (c) Montrer que si a est inversible à droite et non diviseur de 0 à droite, alors il est inversible. Autrement dit, un élément inversible à droite et non inversible admet au moins deux inverses à droite.

- (d) Pouver en fait que si a est inversible à droite et non inversible, alors il admet une infinité d'inverses à droite. En particulier, dans un anneau fini, tout élément inversible à droite est inversible (ce qui est un exercice classique). *(Oral X)*
-