Dans les exercices qui suivent, sauf mention contraire, $\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif quelconque et E, F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels non nuls de dimension finie.

1. *Soit $f \in L(E, F)$.
   (a) Soit E' un sous-espace de E. Montrer que $\dim f(E') = \dim E' - \dim(E' \cap \ker f)$.
   (b) Soit F' un sous-espace de F. Montrer que $\dim f^{-1}(F') = \dim(F' \cap \mathrm{Im}\ f) + \dim \mathrm{Ker}\ f$.

---

2. **Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. A quelle condition nécessaire et suffisante existe-il $u \in L(E)$ d'image F et de noyau G ?

---

3. **Soient $E_0, E_1, ..., E_n$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. On dispose pour tout k d'une application linéaire f_k de E_k dans E_{k+1}. On suppose que pour tout k, $\mathrm{Im}\ f_k = \mathrm{Ker}\ f_{k+1}$ et $\mathrm{Ker}\ f_0 = \{0\}$ et $\mathrm{Im}\ f_{n-1} = E_n$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \dim E_k = 0$.

---

4. ***Soit $(u, v) \in L(E)^2$.
   (a) Montrer que $\mathrm{rg}\ (u + v) \leqslant \mathrm{rg}\ (u) + \mathrm{rg}\ (v)$. En déduire que $|\mathrm{rg}\ (u) - \mathrm{rg}\ (v)| \leqslant \mathrm{rg}\ (u + v)$.
   (b) Prouver que : $\mathrm{rg}\ (u + v) = \mathrm{rg}\ (u) + \mathrm{rg}\ (v) \Longleftrightarrow (\mathrm{Im}\ u \cap \mathrm{Im}\ v = \{0\}$ et $\mathrm{Ker}\ u + \mathrm{Ker}\ v = E)$.

---

5. **Soit $(u, v) \in L(E)^2$. Montrer que $\mathrm{rg}\ (u) + \mathrm{rg}\ (v) - n \leqslant \mathrm{rg}\ (u \circ v) \leqslant \min(\mathrm{rg}\ (u), \mathrm{rg}\ (v))$ où $n = \dim E$.

---

6. *Soit $u \in L(E)$. Montrer qu'il y a équivalence entre :
   (i) $\mathrm{Ker}\ u = \mathrm{Ker}\ u^2$
   (ii) $\mathrm{Im}\ u = \mathrm{Im}\ u^2$
   (iii) $E = \mathrm{Ker}\ u \oplus \mathrm{Im}\ u$.
   Donner des exemples d'endomorphismes vérifiant ces conditions. Le résultat subsiste-il en dimension infinie ? *(Oral X)*

---

7. **Soient E, F deux espaces vectoriels de dimension respectives n et p avec $n > p$. Soit $u \in L(E, F)$ et $v \in L(F, E)$ tels que $u \circ v = \mathrm{Id}_F$. Montrer que $v \circ u$ est un projecteur de rang p. Que vaut $\mathrm{Ker}\ (v \circ u)$?

---

8. **Soient u, v dans $L(E)$ tels que $u + v \in \mathrm{GL}(E)$ et $uv = 0$. Montrer que $\mathrm{rg}\ (u) + \mathrm{rg}\ (v) = \dim E$. *(Oral X, Centrale, Mines,...)*

---

9. Soit u un endormorphisme de $\mathbb{R}^6$ tel que $\mathrm{rg}\ u^2 = 3$. Quels sont les rangs possibles de u ? *(Centrale)*

---

10. *Soit $u \in L(E)$ tel que $u^3 = u$. Montrer que $E = \mathrm{Ker}\ u \oplus \mathrm{Im}\ u$, puis que u induit un automorphisme de $\mathrm{Im}\ u$. *(Oral ENSI)*

---

11. **Soit $u \in L(E)$. Montrer que $\dim \mathrm{Ker}\ u^2 \leqslant 2 \dim \mathrm{Ker}\ u$.

---

12. **Soit $\mathcal{F} = (x_1, ..., x_p)$ une famille de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie n. Montrer que $\mathcal{F}$ est libre si et seulement si pour tout $(\lambda_1, ..., \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ il existe une forme forme linéaire f sur E telle que $f(x_k) = \lambda_k$ pour tout $k \in [\![1, p]\!]$.

---

13. **Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n, et f un endomorphisme de E tel que $f^2 = -\operatorname{Id}$.

    (a) Soit $x_1, ..., x_p$ dans E. Montrer que si la famille $(x_1, x_2, ..., x_p, f(x_1), ...f(x_{p-1}))$ est libre, alors la famille $(x_1, x_2, ..., x_p, f(x_1), ...f(x_{p-1}), f(x_p))$ est aussi libre.

    (b) En déduire que n est pair. Donner un exemple de tel f pour $n = 2$. *(Oral ENSI)*

---

14. ***Soit $u \in L(E, F)$. On pose $r = \operatorname{rg} u$, $n = \dim E$ et $p = \dim F$.

    (a) Calculer la dimension de $G = \{v \in \mathcal{L}(F, E),\ v \circ u = 0\}$.

    (b) Calculer la dimension de $D = \{v \in \mathcal{L}(F, E),\ u \circ v = 0\}$.

    (c) Calculer la dimension de $G \cap D$.

    (d) Calculer la dimension de $H = \{v \in \mathcal{L}(F, E),\ u \circ v \circ u = 0\}$.

---

15. Soit $(f, g) \in L(E)^2$ tel que $f + g = \operatorname{Id}$ et $\operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) \leqslant n$ où $n = \dim E$. Montrer que f et g sont des projecteurs et que $fg = gf = 0$. *(Oral Mines)*

---

16. **Soit u un endormorphisme nilpotent de E. L'indice de nilpotence de u est le plus petit entier p tel que $u^p = 0$. Montrer que $p \leqslant n$ où $n = \dim E$.

---

17. ***Soit E de dimension n et u un endomorphisme nilpotent de rang $n - 1$. Montrer que les seuls sous-espaces stables par u sont les $\operatorname{Ker} u^k$, $k = 0, ..., n$. Quelle est la dimension de chacun de ces espaces ? *(Oral X)*

---

18. ***Soit f, g, h trois endomorphismes de $\mathbb{R}^n$. On considère les conditions suivantes :

    (i) $f \circ g \circ f = f$

    (ii) $g \circ f \circ g = g$

    (iii) $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} g$

    Montrer que deux des trois conditions impliquent la troisième. Si f est fixé, existe-t-il g tel que les trois conditions soient vérifiées ? *(Oral X)*

---

19. ***Soit $f \in L(E)$ de rang 1.

    (a) Soit $g \in L(E)$ de rang 1. Montrer que $\operatorname{rg}(f + g) = 1 \Longleftrightarrow \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} g$ ou $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g$.

    (b) Donner les sous-espaces vectoriels V de $L(E)$ maximaux pour l'inclusion contenant f et tels que $\forall g \in V$, $\operatorname{rg} g = 1$. *(Oral Centrale)*