1. *Calculer la dérivée $n$-ième des fonctions suivantes :

   (a) $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}$

   (b) $x \longmapsto x^2(1+x)^n$.

   (c) $x \longmapsto (x^2+2x+3)e^{2x}$.

   (d) $x \longmapsto x^2 \sin x$.

   (e) $x \longmapsto x^n(1+x)^n$. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^2$.

---

2. **Soit $\alpha = \dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ avec $a, b \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux. Montrer que les dérivées successives de la fonction $x \longmapsto \dfrac{x^n(a-bx)^n}{n!}$ prennent en 0 et en $\alpha$ des valeurs entières.
   *Ce petit résultat est notamment utilisé dans une preuve classique de l'irrationnalité de $\pi$.*

---

3. **Etablir pour tout $n \geqslant 1$ la formule $\dfrac{d^n}{dx^n}\left(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}\right) = (-1)^n x^{-n-1}e^{\frac{1}{x}}$.

---

4. **Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ de classe $C^n$. On pose $g(x) = f(1/x)$ pour tout $x > 0$. Montrer que $g$ est de classe $C^n$ et que

$$g^{(n)}(x) = (-1)^n \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(n-1)(n-2)...(n-p)}{x^{2n-p}} C_n^p f^{(n-p)}(1/x)$$

---

5. **Soit $f$ l'application définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

   (a) Montrer que $f$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ et que $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{x^{3n}} f(x)$ où $P_n$ est un polynôme en $x$ dont on pourra préciser le degré.

   (b) En déduire que $f$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Préciser les dérivées de $f$ en 0.

   (c) Représenter le graphe de $f$.

   (d) Construire une fonction de classe $C^\infty$ nulle sur $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$ et strictement positive sur l'intervalle $]-1, 1[$.

---

6. ***Soit $f(x) = \arctan x$. Montrer que $f$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(x) = (n-1)! \cos^n(f(x)) \sin(nf(x) + n\frac{\pi}{2})$$

---

7. ***__Dérivée $p$-ième d'un produit.__**
   Soient $f_1, \ldots, f_n$ des fonctions $p$ fois dérivables sur $\mathbb{R}$. Montrer que

$$(f_1 \ldots f_n)^{(p)} = \sum_{k_1+\cdots+k_n=p} \frac{p!}{k_1! \ldots k_n!} f_1^{(k_1)} \ldots f_n^{(k_n)}.$$

---