1. ****Lois de composition.**

- (a) Combien peut-on définir de lois de composition internes sur un ensemble E fini de cardinal $n \geq 1$?
 - (b) Parmi ces lois combien sont commutatives ?
-

2. ***Réseau $\mathbb{Z}^2$.** Soit $n \geq 1$.

- (a) Quel est le nombre de couples $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $\max(|x|, |y|) \leq n$?
 - (b) Quel est le nombre de couples $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $\max(|x|, |y|) = n$?
 - (c) Quel est le nombre de couples $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $|x| + |y| \leq n$?
-

3. ***Anniversaires.** Quelle est la probabilité pour que deux élèves de la classe soit nés le même jour de l'année (en sachant que personne n'est né un 29 février) ?

4. ***Fonctions croissantes.** Soit $1 \leq p \leq n$.

- (a) Quel est le nombre d'applications strictement croissantes de $\llbracket 1, p \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$?
 - (b) Soit $f : \llbracket 1, p \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, n \rrbracket$, croissante. Montrer que l'application $g : \llbracket 1, p \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, n + p - 1 \rrbracket$, définie par $g(k) = f(k) + k - 1$ pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, est strictement croissante.
 - (c) En déduire le nombre d'applications croissantes de $\llbracket 1, p \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$.
-

5. ****Surjections.** Nombre de surjections d'un ensemble à $n + 1$ éléments sur un ensemble à n éléments, puis d'un ensemble à $n + 2$ éléments sur un ensemble à n éléments. *(Oral X)*

6. **Dominos.**

- (a) *Combien peut-on faire de dominos avec les entiers de 0 à n ?
 - (b) ***Pour quelles valeurs de n peut-on les mettre bout à bout pour former un cercle en respectant bien entendu la règle du jeu de domino ?
-

7. ****Coloriage.** Trouver le nombre de manières de colorier les cases d'un échiquier $1 \times n$ avec p couleurs sans que deux cases qui se touchent aient la même couleur. Même question pour un échiquier $2 \times n$.

8. **Tours sur un échiquier.**

Pour $n \geq 1$ et $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ on note $u_{n,k}$ le nombre de manières de placer k tours sur un échiquier de taille $n \times n$ sans que deux quelconques des tours ne puissent se prendre (autrement dit sans qu'il y en ait deux sur une même ligne ou une même colonne).

- (a) Calculer $u_{n,1}$ et $u_{n,n}$ pour tout $n \geq 1$.
 - (b) *Déterminer la valeur de $u_{n,k}$ dans le cas général.
 - (c) ***Montrer l'identité $u_{n+1,k} = u_{n,k} + (2n + 1)u_{n,k-1} - n^2u_{n-1,k-2}$ pour $n \geq k \geq 2$ par le calcul puis de manière combinatoire.
-

9. Pavage d'un échiquier.

- (a) **De combien de manières différentes peut-on recouvrir un échiquier $2 \times n$ avec n dominos de taille 1×2 ?
- (b) ***Même question avec un échiquier $3 \times n$.
-

10. ***Tournoi de tennis.** Un tournoi de tennis comporte $2n$ joueurs. De combien de façons différentes peut-on les appairer au premier tour ?

11. ****Lemme de Kaplansky.** Soit $p \leq n/2$. Combien y a-t-il de parties de $\llbracket 1, n \rrbracket$ de cardinal p ne contenant pas deux entiers consécutifs ?

12. ****Nombres de Catalan** On considère un ensemble E muni d'une loi de composition $*$ non présumée associative. On considère un produit P de $n \geq 2$ éléments $x_1, \dots, x_n$ de E dans cet ordre : $P = x_1 * \dots * x_n$. On cherche le nombre C_n de *paranthesages* différents dont on peut munir P pour le calculer par des multiplications successives opérant toujours sur deux facteurs adjacents. On pose par convention $C_1 = 1$. Calculer C_2, C_3, C_4 . Etablir la relation de récurrence suivante : $\forall n \geq 2, C_n = \sum_{k=1}^{n-1} C_k C_{n-k}$.

A l'aide des séries génératrices on peut déduire de cette relation que $C_n = \frac{1}{n} C_{2n-2}^{n-1}$. Il ne semble pas évident (en tous cas je n'y suis pas parvenu), de prouver directement que cette suite vérifie bien la relation de récurrence précédente ! Exercice....(****)

13. ****Fonctions idempotentes.** Trouver le nombre d'applications p de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans lui-même vérifiant $p \circ p = p$ (on donnera le résultat sous forme d'une somme).

14. ***Demi-cercles.** Soient D une droite du plan, Π un des deux demi-plans ouverts de frontière D , n un entier ≥ 4 , $A_1, \dots, A_n$ des points deux à deux distincts de D . On trace les demi-cercles de diamètres $A_i A_j$ dont tous les points sauf les extrémités sont contenus dans Π . Quel est le nombre de points de Π intersection de deux des demi-cercles précédents ?

15. ******Fous sur un échiquier**

- (a) Nombre maximum u_n de fous que l'on peut placer sur un échiquier $n \times n$ sans que deux des fous puissent se prendre ?
- (b) Montrer que dans une telle disposition tous les fous sont au bord de l'échiquier. En déduire le nombre de manières de placer u_n fous.
-