1. Calculer les dérivées des fonctions suivantes en précisant leur domaine de définition :
(a) $x \longmapsto \sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}$. (b) $x \longmapsto x^x$. (c) $x \longmapsto (\cos x)^{\sin x}$. (d) $x \longmapsto \ln(\tan(1+\sqrt{\sin(x^2)}))$.

---

2. Montrer que les fonctions suivantes se prolongent par continuité en 0 et étudier ensuite si ce prolongement est dérivable en 0.
(a) $x \longmapsto \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$. (b) $x \longmapsto x \sin \dfrac{1}{x}$. (c) $x \longmapsto x^2 \sin \dfrac{1}{x}$. (d) $x \longmapsto e^{-1/x^2}$.

---

3. *Conctruire une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable en 0 et discontinue en tout autre point.

---

4. *La fonction $x \longmapsto \cos(\sqrt{x})$ est-elle dérivable à droite en zéro ?

---

5. ****Des fonctions à contre-exemple.**
   (a) Représenter l'ensemble E des couples de réels $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que la fonction f définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = x^\alpha \sin(x^\beta)$ pour $x > 0$, soit continue en 0.
   (b) Représenter l'ensemble $E' \subset E$ formé des couples (α, β) tels que f soit dérivable à droite en 0.
   (c) Donner un exemple de fonction dérivable sur $[-1, 1]$ dont la dérivée n'est pas bornée sur $[-1, 1]$.
   (d) Donner un exemple d'une fonction f dérivable en 0 avec $f'(0) = 1$ et qui n'est monotone sur aucun intervalle ouvert contenant 0.

---

6. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k \sin kx$ où $a_1, ..., a_n$ sont des réels. On suppose que $|f(x)| \leqslant |x|$ pour tout réel x. Montrer que $|a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n| \leqslant 1$.

---

7. **Soient f, g deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. On pose $h = \max(f, g)$. A quelle condition la fonction h est-elle dérivable en un point x_0 ?

---

8. *Montrer qu'une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $|f(x) - f(y)| \leqslant (x - y)^2$ pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ est constante.

---

9. **Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
   (a) On suppose que f est dérivable en 0. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(2x) - f(x)}{x}$.
   (b) On suppose que f est continue en 0 et que $\varepsilon(x) = \dfrac{f(2x) - f(x)}{x} \to 0$ quand $x \to 0$. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. On pose $u_n = f\left(\dfrac{x}{2^{n-1}}\right) - f\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$ pour tout $n \geqslant 1$. Montrer que la série $\sum u_n$ converge et que
   $$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = f(x) - f(0) = x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \varepsilon\left(\frac{x}{2^n}\right)$$
   Déduire de cela que f est dérivable en 0 avec $f'(0) = 0$.

---

10. *Soient $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ dérivables sur $[0,1]$. On suppose que $f(0) = g(0)$ et $f(1) = g(1)$ et aussi que $f'(0) > g'(0)$ et $f'(1) > g'(1)$. Montrer qu'il existe un point $c \in]0,1[$ tel que $f(c) = g(c)$.

---

11. **Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue sur $[0,1]$ et dérivable en 0 avec $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ et $f(1) = -1$. Montrer qu'il existe $a \in]0,1[$ tel que $f(a) = 0$ et $\forall x \in]0,a[,\ f(x) > 0$.

---

12. ****Une tranche de Cauchy de la série harmonique.**

   (a) Montrer que la suite $(S_n)_{n \geqslant 1}$ définie par $S_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} + \cdots + \dfrac{1}{2n}$ est décroissante. En déduire qu'elle converge. Si on note S sa limite, vérifier que $S \geqslant 1/2$.

   (b) Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dérivable à droite en 0 et telle que $f(0) = 0$. Montrer que $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{1}{n+k}\right)$ converge et exprimer sa limite en fonction de S et $f'_d(0)$.

   (c) En utilisant la fonction $f(x) = \ln(1+x)$ montrer que $S = \ln 2$.

   (d) Quelle est la limite de la suite $u_n = \sin\dfrac{1}{n} + \sin\dfrac{1}{n+1} + \cdots + \sin\dfrac{1}{2n}$?

   (e) En admetant le développement asymptotique $H_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n} = \ln n + \gamma + o(1)$, (où $\gamma \in \mathbb{R}$ est par définition la constante d'Euler) retrouver directement la valeur de S.

---

13. **Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ dérivable et vérifiant $f \circ f = f$.

   (a) Montrer que l'ensemble des points fixes de f est un segment.

   (b) En déduire que f est soit constante, soit égale à l'identité.

---

14. ***Dérivée symétrique.** Soit I un intervalle ouvert, $f = I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. Lorsque la limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$$

existe, on la note $f'_s(a)$ et on l'appelle dérivée symétrique de f en a.

   (a) Montrer que si $f'_d(a)$ et $f'_g(a)$ existent alors $f'_s(a)$ existe et donner sa valeur.

   (b) Prouver que la réciproque du a. est fausse.

   (c) Si f est croissante sur I et admet une dérivée symétrique en tout point, que peut-on dire du signe de f'_s? Si f'_s est nulle sur I peut-on en déduire que f est constante sur I?
