Fiche d'exercices
Thème : Géométrie dans l'espace

MPSI 3 - 2004/2005
Chapitre : 21

Quelques exerices sur la géométrie dans l'espace de dimension 3. *On se place dans* $\mathbb{R}^3$ *muni de son repère orthonormé canonique* $R = (O, i, j, k)$

1. **Un peu de géométrie analytique.** *Les questions qui suivent sont indépendantes.*

   (a) Soit D la droite $(x + y - 2z = 1; 2x + y - 3z = -1)$. Donner en un point et un vecteur directeur.
   (b) Soit $A(1, 2, 3)$ et $B(3, 2, 1)$. Donner les équations de deux plans dont (AB) est l'intersection.
   (c) Calculer la distance du point $A(1, 0, -1)$ à la droite $D : (x + 2y - z = 0;\ 2x - y = 1)$.
   (d) Déterminer la perpendiculaire commune aux deux droites $D : (x - y = z + 2; 3x + 4 = 2z - y)$ et $D'(3x - 4y + z = 1; 3x - 6y + 4z + 3 = 0)$. Trouver la distance entre D et D'.

---

2. **Isométries de l'espace.** *Les questions qui suivent sont indépendantes.*

   (a) Soient $P : x + y + z = 3$ et $P' : x - 2y + 3y = 2$ deux plans. Trouver l'équation du plan P'' image de P' par la réflexion orthogonale par rapport à P.
   (b) Soient les deux droites $D : (x \sin\alpha - y \cos\alpha = 0,\ z = a)$ et $D' : (x \sin\alpha + y \cos\alpha = 0,\ z = -a)$, où $\alpha \in]0, \pi/2[$ et $a > 0$. Donner l'expression analytique des retournements s_D et s'_D et du vissage $r = s_D \circ s'_D$.
   (c) Donner l'expression analytique des symétries planes s_1 et s_2 par rapport aux plans respectifs $P_1 : y + 2z = 1$ et $P_2 : x + z = 2$. Caractériser géométriquement le produit $s_1 \circ s_2$.
   (d) Etudier l'application f de $\mathbb{R}^3$ définie par $f(M) = M'$ avec $M(x, y, z)$ et $M'(x', y', z')$ où

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 14 & -2 & 5 \\ -2 & 11 & 10 \\ -5 & -10 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

---

3. **Caractérisation des sphères.** Que dire d'un ensemble S non vide de $\mathbb{R}^3$ dont l'intersection avec tout plan est soit vide, soit réduite à un point, soit un cercle ?

---

4. **Sphère circonsrite à un tétraèdre.** Soit (A_0, A_1, A_2, A_3) quatre points non coplanaires de $\mathbb{R}^3$. Montrer qu'il existe une unique sphère contenant tous les A_i. *(Oral X)*

---

5. **Sphères orthogonales.** Soient deux sphères non concentriques S_1 et S_2, de centres O_1, O_2, de rayons R_1 et R_2. On pose $P_i(M) = O_iM^2 - R_i^2$. Montrer l'équivalence des quatre propositions sauivantes :
   (i) $P_2(O_1) = R_1^2$ *(ii)* $P_1(O_2) = R_2^2$ *(iii)* $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$ et $\forall M \in S_1 \cap S_2$, $(O_1M) \perp (O_2M)$
   (iv) $\forall M$, $P_1(M) + P_2(M) = 2 < \overrightarrow{O_1M}, \overrightarrow{O_2M} >$.

---

6. **Un passage par la quatrième dimension.** On considère un hypercube de $\mathbb{R}^4$. On le coupe par un plan passant par le centre de l'hypercube et orthogonal à une diagonale. Dessiner la figure obtenue.

---

7. **Application affine conservant la sphère.**

   Soit S une sphère de $\mathbb{R}^3$ de centre l'origine et de rayon $R > 0$. On se donne une application affine f de $\mathbb{R}^3$ telle que $f(S) = S$.

   (a) Montrer que $f(0) = 0$.
   (b) Prouver que le sous-espace affine engendrée par S est $\mathbb{R}^3$.
   (c) Montrer que f est une isométrie vectorielle.

---

8. Déterminer le centre des groupes $Is(E_n)$ et $Is^+(E_n)$.

---

9. **Le tétraèdre régulier** Soit $T = (A, B, C, D)$ un tétraèdre régulier de E_3 de côté 1.
   a. Quelle est la longueur d'une hauteur de T (distance de A au plan (BCD)) ?
   b. Quel est le volume de T ?
   c. Quel est le rayon de la boule circonsrite à T ? de la boule inscrite dans T ?
   d. Quel est le groupe des isométries de T ?
   e. Peut-on "paver" l'espace avec des tétraèdres réguliers ?

---

10. Soit C un cube de E_3 de côté 1 et p la projection orthogonale sur un plan. Quelle est la valeur maximale que peut avoir l'aire de $p(C)$? *Concours général 1997*

---

11. Montrer que le groupe des rotations qui stabilisent un cube est isomorphe à $\mathcal{S}_4$. Vérifier que $\mathcal{S}_4$ admet 3 sous-groupes d'ordre 8 isomorphes à D_4.

---

12. Soient P_1 et P_2 deux plans perpendiculaires de $\mathcal{E}_3$. Que vaut la composée des réflexions par rapport à P_1 et P_2 ?

---

13. **Rangement d'un cerceau** Soit $R > 0$. Lieu des centres des cercles de rayon R tangents aux trois plans de coordonnées.
