On a montré en cours que si E et F sont deux ensembles finis de cardinaux respectifs p et q, il existe une injection de E dans F si et seulement si $p \leqslant q$. Le principe de Peter Gustav Dirichlet (1805-1859) est le cas particulier suivant : "pour $n \in \mathbb{N}$, il n'existe pas d'injection d'un ensemble de cardinal $n+1$ dans un ensemble de cardinal n". L'énoncé est souvent donné sous la forme plus prosaïque suivante : "si on doit ranger $n+1$ boules dans n tiroirs, il y a au moins un tiroir qui contient au moins deux boules". On peut aussi prendre $n+1$ pigeons et n nids, d'où le nom de Pigeon Hole Principle donné à ce résultat par les Anglo-Saxons. Que peut-on démontrer d'intéressant avec un résultat aussi trivial ? Et bien pas mal de choses et il est souvent subtil de trouver les tiroirs et les boules ! Certains des énoncés ci-après nécessitent un peu d'arithmétique.

1. (a) Montrer la généralisation du principe de Dirichlet suivante : pour $k \geqslant 1$, $n \geqslant 1$ si on doit ranger $kn+1$ boules dans n tiroirs, il existe au moins un tiroir qui contient au moins $k+1$ boules.
   (b) Montrer que parmi 7 personnes il y en a au moins 4 de même sexe.
   (c) On place 9 points dans un carré de côté 1. Montrer qu'il existe trois des points formant un triangle d'aire inférieure ou égale à $1/8$.

---

2. *Montrer que chaque matin dans la classe, il y a deux élèves qui serrent le même nombre de mains.

---

3. *Soit n impair, $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille de n entiers naturels et σ une permutation de $[\![1,n]\!]$. Montrer que l'entier $(a_{\sigma(1)}-a_1)(a_{\sigma(2)}-a_2)\dots(a_{\sigma(n)}-a_n)$ est pair.

---

4. **Montrer que tout entier $n \geqslant 1$ admet un multiple ne s'écrivant en base 10 qu'avec les chiffres 0 et 1.

---

5. **Soit A une partie de $[\![1,2n]\!]$ de cardinal $n+1$.
   (a) Montrer qu'il existe deux entiers distincts a et b dans A tel que a divise b.
   (b) Montrer qu'il existe a, b dans A premiers entre eux.

   Ces deux petits exercices sont dus à Paul Erdös qui aimait bien les poser pour repérer les jeunes talents mathématiques.

---

6. **Soit $n \geqslant 1$. Montrer que parmi n entiers naturels quelconques, on peut toujours en choisir certains (éventuellement un seul) dont la somme est un multiple de n.

---

7. **Soit E un ensemble de dix entiers de deux chiffres en écriture décimale. Montrer qu'il existe deux sous-ensembles disjoints de E dont les sommes des éléments sont égales. *(Olympiades, 1972)*

---

8. ***__Approximation diophantienne__
   (a) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $N \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $n \in [\![1,N]\!]$ et $p \in \mathbb{Z}$ tels que $|n\alpha - p| < \dfrac{1}{N}$.
   C'est dans ce théorème d'approximation que Dirichlet utilisa le principe qui porte son nom.
   (b) En déduire que pour tout réel θ il y a une infinité de couples $(p,q) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$ tels que $\left|\theta - \dfrac{p}{q}\right| \leqslant \dfrac{1}{q^2}$.

---

9. ****__Théorème d'Erdös-Szekeres (1935)__ Soit $S = (u_1, u_2, ..., u_{nm+1})$ une suite de $nm+1$ entiers distincts ($n, m \geqslant 1$). Montrer que, soit il existe une sous-suite strictement décroissante de S d'au moins $m+1$ termes, soit il existe une sous-suite strictement croissante de S d'au moins $n+1$ termes.
