1. *Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $E(2x + 1) = E(x + 4)$.

2. *Montrer que pour tout $x \geq 0$, $E(\sqrt{x}) = E(\sqrt{E(x)})$.

3. *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $\sum_{k=0}^{n-1} E\left(x + \frac{k}{n}\right) = E(nx)$.

4. *Montrer que $\forall n \geq 1$, $2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$. En déduire la valeur de

$$E\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{10000}}\right)$$

5. *Soient $a < b$ deux réels. Combien la fonction sinus a-t-elle de zéros dans l'intervalle $]a, b]$?

6. Soit $(k, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Quel est le nombre d'entiers de $\llbracket 1, n \rrbracket$ divisibles par k ?

7. Quel est le nombre de chiffres de l'écriture d'un entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$ en base $b \geq 2$?

8. **Quelle est la parité de l'entier $E(2 + \sqrt{3})^n$?

9. **Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a $E(n\Phi^2) = E(E(n\Phi)\Phi) + 1$ où $\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ est le nombre d'or.

10. **Donner une condition nécessaire et suffisante sur le réel $b > 1$ pour qu'on ait :

$$\forall x \geq 1, \quad E(\log_b x) = E(\log_b(E(x)))$$

On rappelle que $\log_b(x) = \frac{\ln x}{\ln b}$ est le logarithme de base b .

11. ***Soit $u_0 \in \mathbb{N}$. On définit la suite (u_n) par la relation $u_{n+1} = u_n + E(\sqrt{u_n})$.

(a) Montrer qu'il existe une infinité d'indice n pour lesquels u_n est un carré parfait.

(b) Si $u_0 = 1$ montrer que u_n est un carré si et seulement si n est de la forme $2^k + k - 3$, $k \geq 1$.

12. ***Soient p, q deux entiers naturels non nuls premiers entre eux. Montrer que:

$$\sum_{k=1}^{q-1} E\left(\frac{kp}{q}\right) = \sum_{k=1}^{p-1} E\left(\frac{kq}{p}\right) = \frac{(p-1)(q-1)}{2}$$

Ce calcul est à la base d'une preuve de la célèbre loi de réciprocité quadratique.

13. **** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^n E\left(\frac{2k}{3}\right) = E\left(\frac{n^2}{3}\right)$$

14. *** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $E(\sqrt{n} + \sqrt{n+1}) = E(\sqrt{4n+1}) = E(\sqrt{4n+2}) = E(\sqrt{4n+3})$.