On rappelle que les seules fonctions continues sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pour tout (x, y) sont les fonctions linéaires $x \mapsto ax$. Quelques exercices concernent le chapitre dérivabilité.

1. (a) Déterminer les fonctions continues $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ vérifiant $f(x+y) = f(x)f(y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
 (b) Déterminer les fonctions continues de $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ vérifiant $f(xy) = f(x)f(y)$ pour tout (x, y) .
 (c) Déterminer les fonctions continues de $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $f(xy) = f(x) + f(y)$ pour tout (x, y) .

2. *Trouver les fonctions continues $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}$ pour tout (x, y) .

3. **Trouver les fonctions continues f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $f(x^2 - y^2) = f(x)^2 - f(y)^2$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

4. **Trouver les fonctions continues de $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \sqrt{f(x)f(y)}$ pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. *(Oral des Mines 2000)*

5. *Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue en 0 et 1 et vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x^2) = f(x)$.

6. *Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et telle que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(2x+1) = f(x)$.

7. *Trouver les fonctions continues de $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(xy) = xf(y) + yf(x)$.

8. **Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et transformant toute suite arithmétique en une suite arithmétique. Que dire de f ? *(Oral Centrale)*

9. *Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables en 0 et telles que $\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = 2f(x)$.

10. ***Soit H l'ensemble des involutions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R} : H = \{f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}), f \circ f = \text{Id}\}$.

- (a) Montrer que si $h \in H$, alors h est strictement monotone.
- (b) Montrer que si $h \in H$ est croissante, il s'agit de l'identité.
- (c) Soit $h \in H$ strictement décroissante. Montrer que h admet un unique point fixe. Montrer qu'il existe un homéomorphisme strictement croissant ψ de $\mathbb{R}$ tel que $h = \psi \circ s \circ \psi^{-1}$ où s est l'involution $x \mapsto -x$.

11. *Trouver les applications $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables sur $\mathbb{R}$, vérifiant $f(0) = 0, f'(0) > 0$ et $f'(f(x))f'(x) = 1$ pour tout réel x .

12. ****Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $f(x^2) = f(x)^2$ et $f(x+1) = f(x) + 1$ pour tout réel x . *Attention, il n'y a aucune hypothèse de régularité sur f .*

13. *****Trouver toutes les fonctions $g \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, g(g(x)) = 2g(x) - x$.