

1. Soient $0 < x < y$. Etudier la fonction $h(\alpha) = \left(\frac{x^\alpha + y^\alpha}{2}\right)^{1/\alpha}$. On montrera notamment qu'elle se prolonge en une fonction croissante sur $\mathbb{R}$ et on calculera les limites en $+\infty$ et $-\infty$.
-

2. On pose $f(x) = \frac{\arctan x}{x}$ pour tout réel x non nul. (*Concours ATS 2003, PC, Problème I, partie A*)
- (a) Montrer que f se prolonge par continuité en 0 et préciser la valeur à choisir pour $f(0)$.
 - (b) Montrer que f , ainsi prolongée, est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
 - (c) Etudier la parité, les variations et les limites en $\pm\infty$ de f . Dessiner le graphe de f .
 - (d) Donner un développement asymptotique de $f(x)$ en $+\infty$ sous la forme $a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_3}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$.
-

3. **Le début du problème de Centrale-Supelec MP 2001, épreuve I.**

- (a) Soit $z = \rho e^{i\theta}$ un nombre complexe ($\rho \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$). Déterminer en fonction de ρ et θ une forme trigonométrique du nombre complexe $\xi = ze^{-z}$.
 - (b) Démontrer que la fonction u définie sur $]0, 1]$ par $u(t) = \frac{1 + \ln t}{t}$ est une bijection strictement croissante de $]0, 1]$ sur $] -\infty, 1]$. Montrer que sa fonction réciproque est de classe C^1 sur $] -\infty, 1[$.
 - (c) En déduire l'existence d'une fonction $\theta \mapsto r(\theta)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel θ , $r(\theta) \in]0, 1]$ et $r(\theta)e^{-r(\theta)\cos\theta} = \frac{1}{e}$.
 - (d) Estimer de manière simple $r(0)$ et $r(\pi/2)$.
 - (e) Montrer que r est une fonction continue, 2π -périodique et paire. Montrer qu'elle est de classe C^1 sur $]0, 2\pi[$ et que pour $\theta \in]0, 2\pi[$, $\frac{dr}{d\theta} = \frac{r^2 \sin \theta}{r \cos \theta - 1}$.
 - (f) Donner un équivalent en 0^+ de $v(h) = 1 - u(1 - h)$. Grâce à une expression de $1 - \cos \theta$ à l'aide de $u(r(\theta))$, en déduire que $r(\theta) = 1 - \theta + o(\theta)$ lorsque $\theta \rightarrow 0^+$. Étudier la dérivabilité à droite et à gauche de r en 0.
-

4. **Une famille de fonctions.** On considère la famille de fonctions f_α définie par :

$$f_\alpha : x \mapsto \frac{x^2 - \alpha x + 1}{\sqrt{x^2 + 1}} e^{\arctan x}$$

- (a) Montrer qu'en $+\infty$, f_α admet une asymptote (D_α) à préciser. Etudier la position du graphe par rapport à cette asymptote. Etude similaire en $-\infty$.
 - (b) Etudier en fonction de α les variations de f_α . Préciser les positions relatives de f_α et f_β pour $\alpha < \beta$.
 - (c) Représenter l'allure des graphes de f_α notamment pour $\alpha = -1, 0, 1, 2$.
 - (d) Lieu des points du graphe de f_α où il y a une tangente horizontale lorsque α varie.
-

5. Nombres de Bernoulli.

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 1$.

- (a) Etudier les variations de f ainsi que ses branches infinies éventuelles.
- (b) Montrer que f admet un $DL_n(0)$ pour tout entier $n \geq 0$. On note $a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ la partie polynômiale de ce développement.
- (c) Déterminer a_0, a_1, a_2 . Etudier f en 0 et dresser le graphe de f .
- (d) En considérant $f(x) + \frac{x}{2}$, montrer que pour tout $k \geq 1$, $a_{2k+1} = 0$.
- (e) Montrer que $\forall n \geq 2$, $\frac{a_n}{1!} + \frac{a_{n-1}}{2!} + \dots + \frac{a_2}{(n-1)!} = \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} \right)$. En déduire a_3 et a_4 .

Les rationnels $B_n = n!a_n$ sont par définition les nombres de Bernoulli.

6. Quelques inégalités. (Extrait Ecrit ENS Cachan)

On se donne deux nombres réels fixés x et y vérifiant $0 < x < y$.

- a. Pour tout réel non nul α , on pose $h(\alpha) = \left(\frac{x^\alpha + y^\alpha}{2} \right)^{\frac{1}{\alpha}}$. Montrer que la fonction h est continue sur $\mathbb{R}^*$ et se prolonge par continuité en 0. On note encore h ce prolongement. Préciser $h(0)$, $h(\frac{1}{2})$ et $h(1)$.
- b. Montrer qu'il existe une application K continue sur $\mathbb{R}$ et telle que pour tout nombre réel α différent de 0 et de 1 on ait $K(\alpha) = \left(\frac{y^\alpha - x^\alpha}{\alpha(y-x)} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$. Calculer $K(-1)$, $K(0)$, $K(\frac{1}{2})$, $K(1)$ et $K(2)$.
- c. Etudier le comportement de $h(\alpha)$ et de $K(\alpha)$ lorsque α tend vers $+\infty$. Faire de même en $-\infty$.
- d. Montrer que pour tout nombre réel α on a $x < h(\alpha) < y$ ainsi que $x < K(\alpha) < y$.
- e. Etudier le sens de variation et dresser le tableau de variation de l'application:

$$u : t \in]0, +\infty[\mapsto 3 \ln t - 8 \frac{t^3 - 1}{(t+1)^3}$$

En déduire l'inégalité $h\left(\frac{1}{3}\right) > \frac{y-x}{\ln y - \ln x}$.

- f. Etudier le sens de variation de l'application $v : t \in]0, +\infty[\mapsto \frac{(t+1)(t^3-1)}{t(t^2+1)} - 3 \ln t$.
 - g. Dresser le tableau de variation de l'application $w : t \in]1, +\infty[\mapsto \frac{2 \ln t}{t-1} - 3 \ln(1+t^{-\frac{2}{3}})$. On étudiera en particulier le comportement de w en 1^+ . En déduire l'inégalité $h\left(\frac{2}{3}\right) < \frac{1}{e} \left(\frac{y^y}{x^x} \right)^{\frac{1}{y-x}}$.
-

7. Quelques études de fonctions à la carte.

Dans chacun des cas suivants, étudier et représenter graphiquement la fonction f proposée.

- a. $f(x) = |x|^{1+1/x}$
 - b. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x \ln x}$
 - c. $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1} e^{1/x}$
 - d. $f(x) = (\operatorname{ch} x)^{1/x}$
 - d. $f(x) = \frac{1}{\operatorname{arcsin} x} - \frac{1}{x}$
 - e. $f(x) = \frac{x}{\operatorname{sh} x} - \frac{1}{\operatorname{ch} x}$
 - f. $f(x) = \frac{\operatorname{arcsin} \sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}$
 - g. $f(x) = \operatorname{arctan} \sqrt{x}$
-

8. Des branches infinies.

Etudier les fonctions suivantes en portant une attention particulière aux branches infinies:

- a. $f(x) = (x-1) \exp\left(\frac{1}{x+1}\right)$
 - b. $g(x) = e^{-\frac{1}{x}} \sqrt{x^2 + x + 1} \operatorname{arctan} x$
 - c. $h(x) = (1+x)^{1+\frac{1}{\ln x}}$.
-

9. Une fonction implicite.

- a. Soit f la fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$. Calculer f' et f'' . Etudier les variations de f et représenter son graphe. Préciser la concavité et les points d'inflexion éventuels.
- b. Soit φ la réciproque de la restriction de f à l'intervalle $]0, e]$. Justifier l'existence de φ et préciser son domaine de définition. Soit θ la fonction $\varphi \circ f$. Que vaut $\theta(x)$ pour $0 < x \leq e$?
- c. Montrer que pour $x > e$, $\theta(x)$ est l'unique réel $z > 0$ différent de x tel que $z^x = x^z$. Donner une construction géométrique de $\theta(x)$ à partir de x sur le graphe de la question a.
- d. Montrer que θ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et de classe C^∞ sur $]0, e[\cup]e, +\infty[$. Montrer que pour tout $x \neq e$,

$$\theta'(x) = \frac{\theta^2(x)(1 - \ln x)}{x^2(1 - \ln \theta(x))}$$

Dresser le tableau de variation de θ . Préciser notamment les limites en 0 et $+\infty$.

- e. On s'intéresse dans cette question à la dérivabilité de θ en e . Que dire de la dérivée à gauche de θ en e ? Calculer le développement limité à l'ordre 2 en e de f . En utilisant la relation $f(x) = f(\theta(x))$, montrer que $e - \theta(x)$ est équivalent à $x - e$ lorsque x tend vers e par valeurs supérieures. En déduire la valeur de $\lim_{x \rightarrow e^+} \theta'(x)$. Conclure.
- f. Dresser l'allure du graphe de la fonction θ . Quelle information supplémentaire manque-t-il pour un tracé plus précis ?
-

10. Vu aux oraux des concours

Etudier la fonction $x \mapsto x\sqrt{|x^2 - 3x + 2|}e^{1/x}$ (Centrale 1995).

11. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ on considère la fonction $f_\alpha(x) = x^{\frac{1}{x} + \alpha}$ et on note C_α son graphe. Etudier f_α en distinguant suivant les valeurs de α et tracer en particulier C_0 , C_{-1} et C_{-3} . Déterminer l'ensemble Γ des extrema de f_α lorsque α décrit $\mathbb{R}^*$.
-

12. Soit f la fonction définie par:

$$f(x) = \arcsin \left(\frac{\sqrt{3}(2x - 1)}{2(x^2 - x + 1)} \right)$$

- a. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$, dérivable partout sauf en deux points que l'on précisera.
- b. Etudier f et tracer son graphe en repère orthonormé. On précisera les points d'inflexion ainsi que le comportement de f aux points où elle n'est pas dérivable.
- c. Montrer que l'antécédent x de y s'exprime facilement en fonction de $\tan \frac{y}{2}$ (on distinguera plusieurs cas). Comment cela se traduit-il sur le graphe de f ?
-