1. *Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Etudier la suite $u_n = \max_{0 \leq k \leq n} f\left(\frac{k}{n}\right)$.
2. *Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue, tendant vers $+\infty$ en $+\infty$ et en $-\infty$. Montrer que f est minorée et qu'elle atteint son minimum.
3. *Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue et de limite nulle en $+\infty$.
- (a) Montrer que f est bornée.
 - (b) Montrer que si f prend une valeur strictement positive (resp. négative), elle admet un maximum (resp. minimum) ?

4. *Existe-t-il une bijection continue de $[0, 1]$ sur $\mathbb{R}$? et de $]0, 1[$ sur $\mathbb{R}$? et de $[0, 1[$ sur $\mathbb{R}$?

5. *Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et périodique.
- (a) Montrer que f est bornée et qu'elle atteint ses bornes.
 - (b) Montrer que $\forall a \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x+a) = f(x)$.

6. ***Montrer qu'une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et sans extremum local est strictement monotone.

7. **Soit $f \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. On pose $M(x) = \sup_{t \in [0, x]} |f(t)|$. On suppose qu'il existe A tel que:

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, |f(x)| \leq A + \frac{M(x)}{2}$$

Prouver que f est bornée.

(Oral X)

8. ***Version continue du théorème de Cesaro

Soit $f \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. On suppose que $f(x+1) - f(x)$ tend vers une limite l lorsque $x \rightarrow +\infty$. Montrer que $\frac{f(x)}{x}$ tend également vers l en $+\infty$. On pourra commencer par le cas où $l = 0$ et s'y ramener dans le cas général.