1. **Petit système.**

   Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x^2+y^2+z^2=9 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1 \end{cases}$

---

2. **Moyenne des racines.**

   Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \geqslant 1$. On note $\mu(P) = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{P(z)=0} z$ la moyenne des racines de P.

   (a) Montrer que $\mu(P) = \mu(P')$.

   (b) En déduire que les sommes des zéros de $P, P', ..., P^{(n-1)}$ forment une progression arithmétique.

---

3. Soit $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ qui à $(z_1, ..., z_n)$ associe $(\sigma_1, ..., \sigma_n)$ où σ_k désigne la k-ième fonction symétrique élémentaire des z_i. L'application f est-elle surjective ? injective ?

---

4. ****Un calcul de $\zeta(2)$.**

   Cette jolie démonstration a souvent été redécouverte. Elle apparait déjà en 1954 dans un recueil d'exercices des frères Yaglom.

   (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall \theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, $\sin(n\theta) = \sin^n \theta (C_n^1 \operatorname{cotan}^{n-1} \theta - C_n^3 \operatorname{cotan}^{n-3} \theta + \cdots + ?)$ où l'on précisera le dernier terme en distinguant les cas n pair et n impair.

   (b) On considère pour $p \geqslant 1$, $Q_p(X) = C_{2p+1}^1 X^p - C_{2p+1}^3 X^{p-1} + \cdots + (-1)^p$. Déduire de la première question que Q_p admet p racines distinctes $x_1, ..., x_p$ que l'on précisera. Calculer $x_1 + x_2 + \cdots + x_p$.

   (c) Prouver que pour tout $t \in]0, \pi/2[$, $\operatorname{cotan}^2 t < \dfrac{1}{t^2} < 1 + \operatorname{cotan}^2 t$ et en déduire les sommes des séries suivantes

   $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

---

5. ****Parallélogramme.**

   Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ et $P = X^4 + aX^2 + bX + c \in \mathbb{C}[X]$. Trouver une CNS sur (a, b, c) pour que les racines z_1, z_2, z_3, z_4 de P soient les sommets d'un parallélogramme.

---

6. ***Calcul d'une somme de Newton.**

   Soit $P = X^3 - X + 1 = 0$ dont les racines complexes sont z_1, z_2, z_3.

   (a) Déterminer le polynôme du troisième degré dont les racines sont z_1^3, z_2^3, z_3^3.

   (b) En déduire la somme $S = z_1^6 + z_2^6 + z_3^6$.

---

7. ****Polynômes à coefficients entiers ses racines dans le disque unité.**

   Soit $n \geqslant 1$. Montrer qu'il n'y a qu'un nombre fini de polynômes unitaires de degré n et à coefficients dans $\mathbb{Z}$ dont toutes les racines complexes ont un module $\leqslant 1$.

---

8. **Questions indépendantes sur un polynôme de degré 3.** (**)

Soit $P = X^3 + aX^2 + bX + c \in \mathbb{C}[X]$.

(a) Trouver une CNS pour que les racines de P forment une progression arithmétique.

(b) Trouver une CNS pour que les racines de P forment, avec l'origine O, un carré.

(c) Trouver une CNS pour que chaque racine de P soit égale au produit des deux autres.

(d) Soit α, β, γ les racines dans $\mathbb{C}$. Calculer *(Oral Centrale)*

$$\frac{\alpha}{\beta+\gamma} + \frac{\beta}{\alpha+\gamma} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta}$$

---

9. **Sommes de Newton.** (***)

Soit $x_1, ..., x_n$ des nombres complexes dont on note $\sigma_1, ..., \sigma_n$ les fonctions symétriques élémentaires. Pour $p \in \mathbb{N}$ on pose $S_p = x_1^p + \cdots + x_n^p$ (sommes de Newton).

(a) Montrer que pour tout $p \geqslant n$ on a

$$S_p - \sigma_1 S_{p-1} + \sigma_2 S_{p-2} - \cdots + (-1)^{n-1}\sigma_{n-1}S_{p-n} + (-1)^n \sigma_n S_{p-n} = 0$$

(b) Montrer que pour $1 \leqslant p \leqslant n-1$ on a

$$S_p - \sigma_1 S_{p-1} + \sigma_2 S_{p-2} - \cdots + (-1)^{p-1}\sigma_{p-1}S_{p-1} + (-1)^p p\sigma_p = 0$$

(c) En déduire que la connaissance de $S_1, ..., S_n$ permet de trouver $\sigma_1, ..., \sigma_n$.

(d) Un exemple d'application : soit A une matrice triangulaire de $M_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{Tr}A^k = 0$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. Montrer que A est nilpotente. *Toute matrice de $M_n(\mathbb{C})$ est en fait semblable à une matrice triangulaire (cf. cours de Spéciales). Le résultat précédent reste donc vrai si A est quelconque. Vérifiez-le !*

10. **Un théorème de Newton.** (****)

Soient $a_1, ..., a_n$ des réels, $\sigma_1, ..., \sigma_n$ les fonctions symétriques élémentaires associées et $\mu_k = \dfrac{\sigma_k}{C_n^k}$.
Montrer que $\mu_k^2 \geqslant \mu_{k-1}\mu_{k+1}$. *(Oral X)*
