1. *Prouver que si $(u_k)$ est une suite croissante de réels strictement positifs et $k$ et $n$ des entiers tels que $1 \leqslant k \leqslant n$, on a $(u_1 u_2 ... u_k)^n \leqslant (u_1 u_2 ... u_n)^k$.

---

2. ***Inégalité de Bernoulli.**

   Montrer que pour $x > -1$ et $n \in \mathbb{N}$, $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$.

---

3. ***Inégalité de Cauchy-Schwarz.**

   *Cette inégalité est très importante et elle est utilisée dans plusieurs des exercices ci-après. On en donnera l'éclairage géométrique et la version générale dans le cours sur les espaces euclidiens.*

   Soient $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$.

   (a) On suppose $y$ non nul. Calculer le discriminant du polynôme du second degré $P(t) = \sum_{i=1}^{n} (x_i + t y_i)^2$.

   (b) En déduire *l'inégalité de Cauchy-Schwarz* : $\left| \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$. Préciser les cas d'égalité.

   (c) Montrer *l'inégalité de Minkowski* : $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$.

---

4. *Calculer $\sup_{(x,y,z) \in S} (x + 2y + 3z)$ où $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Montrer que cette borne supérieure est atteinte et préciser en quel(s) point(s).

---

5. ***Soit $x_1, ..., x_n$ des réels tels que $(n-1) \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = \left( \sum_{k=1}^{n} x_k \right)^2$. Montrer que tous les $x_k$ ont le même signe.

---

6. (a) Montrer que pour tout $x > 0$, on a $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$.

   (b) *Soit $x_1, ..., x_n$ des réels strictement positifs. Montrer que $\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \frac{x_i}{x_j} \geqslant n^2$.

---

7. *Montrer que : $\forall (x_1, ..., x_n) \in [0,1]^n$, $1 - (1-x_1)(1-x_2)...(1-x_n) \leqslant x_1 + x_2 + \cdots + x_n$.

---

8. *Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $C_{2n}^n < \frac{4^n}{\sqrt[3]{n}}$.

---

9. *Montrer que pour tout entier naturel $n$, $\left( \frac{n+1}{2} \right)^n \geqslant n!$.

---

10. *****Dés pipés.**

    Est-il possible de piper deux dés de manière à rendre les sorties des entiers $2, 3, ..., 12$ équiprobables ? Même question avec deux dés à $n$ faces ?

---

11. **L'addition parallèle.**

*Il est bien connu en électricité, que si on met deux résistances $R$ et $R'$ en parallèles, la résistance équivalente obtenue est $\frac{RR'}{R+R'}$. On se propose dans cet exercice d'étudier quelques aspects de cette loi de composition interne.*

On note // la loi de composition interne définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $a//b = \dfrac{ab}{a+b}$.

(a) Montrer que // est une loi associative et commutative.

(b) *Montrer que // n'admet pas d'élément neutre.

(c) **Soit $x > 0$. Montrer que $\inf\limits_{\substack{(y,z)\in\mathbb{R}^2\\ y+z=x}} (ay^2+bz^2) = (a//b)x^2$. Cette borne inférieure est-elle atteinte ? Si oui en quels points $(y, z)$ ?

(d) ***Soit $n \geqslant 1$, $(a_1, ..., a_n)$ et $(b_1, ..., b_n)$ deux $n$-uplets de réels strictement positifs. Montrer que

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i//b_i) \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) // \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)$$

**Note.** *Les résultats des questions (c) et (d) ont des interprétations physiques.*

---

12. ***Inégalité du réordonnement.**

(a) Soient $n \geqslant 2$, $0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ et $b_1 < b_2 < \cdots < b_n$ des réels. Pour toute permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ on pose $S_\sigma = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_{\sigma(i)}$. Montrer que le minimum de $S_\sigma$ lorsque $\sigma$ décrit $\mathcal{S}_n$ est atteint en une unique permutation $\sigma_0$ que l'on précisera. Même question pour le maximum.

(b) Soient $a_1, ..., a_n$ des entiers naturels non nuls et deux à deux distincts. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^2} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = H_n$$

---

13. ****Inégalité de Tchebytchev.**

Soit $n \geqslant 2$ et $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$, $(b_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ deux suites finies croissantes de réels positifs ou nuls.

(a) Etablir que $\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} b_i\right) \leqslant \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i$. *On peut par exemple utiliser l'exercice précédent.*

(b) En déduire que $\forall (a, b, c) \in (\mathbb{R}_+)^3$, $(a + b + c)^n \leqslant 3^{n-1}(a^n + b^n + c^n)$. Montrer que $3^{n-1}$ est le meilleur coefficient possible.

(c) Soient $a_1, ..., a_n$ des réels strictement positifs ($n \geqslant 2$). Montrer que $\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{a_i}{\sum_{j\neq i} a_j} \geqslant \dfrac{n}{n-1}$. *On peut le déduire de l'inégalité de Tchebytchev mais aussi en donner une preuve directe.*

---

14. ***Soit $\varepsilon \in ]0, 1[$ et $N \geqslant 2$. On se donne $N$ réels strictement positifs $x_1, ..., x_N$ vérifiant $x_i x_j \leqslant \varepsilon^{|i-j|}$ pour tout couple $(i, j) \in [\![1, N]\!]^2$. Montrer que

$$\sum_{i=1}^{N} x_i \leqslant \frac{1}{1-\sqrt{\varepsilon}}$$

---