Cette fiche contient quelques exercices sur les limites qui n'utilisent pas les développements limités ou asymptotiques.

1. *Etudier l'existence, et calculer le cas echéant, les limites des fonctions suivantes au point x_0 indiqué :
   (a) $x \longmapsto \sin \dfrac{1}{x}$ en 0 (b) $x \longmapsto xE\left(\dfrac{1}{x}\right)$ en 0 (c) $x \longmapsto x\left(\sqrt{x+\sqrt{x+1}}-\sqrt{x+\sqrt{x-1}}\right)$ en $+\infty$.

---

2. **Calculer, si elle existe, $\lim\limits_{x\to+\infty} x-\sqrt{E(x^2)}$, où E désigne la partie entière.

---

3. *Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ périodique. Que dire de f si elle admet une limite (finie ou infinie) en $+\infty$?

---

4. **Représenter dans le plan $\mathbb{R}^2$ l'ensemble des couples (α,β) tels que $x\mapsto x^\alpha\sin(x^\beta)$ ait une limite finie en $+\infty$. On pourra utiliser le fait que $\dfrac{\sin u}{u}$ tend vers 1 lorsque $u\to 0$.

---

5. ***Soit $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$. Etudier si les conditions suivantes sont suffisantes pour dire que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.
   (a) Pour toute suite croissante (x_n) tendant vers $+\infty$, la suite $(f(x_n))$ converge vers 0.
   (b) f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et la suite $(f(n))_{n\geqslant 0}$ converge vers 0.
   (c) f est K-lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$ et la suite $(f(n))_{n\geqslant 0}$ converge vers 0.
   (d) f est K-lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$ et la suite $(f(\sqrt{n}))_{n\geqslant 0}$ converge vers 0.

---

6. **Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. On suppose que pour tout x, la restriction de f à $\mathbb{R}\setminus\{x\}$ admet une limite en x que l'on note $g(x)$. Montrer que la fonction g ainsi définie est continue sur $\mathbb{R}$. Etudier quelques exemples.

---

7. **Déterminer les fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ vérifiant les deux conditions suivantes :
   (i) $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x+y)\leqslant f(x)+f(y)$
   (ii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$

---

8. ***Soit $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+^*$ croissante telle que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(2x)}{f(x)}=1$.
   (a) Montrer que $\forall c>0,\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(cx)}{f(x)}=1$.
   (b) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln f(x)}{\ln x}=0$.

---

9. ***Soit $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ telle que :
   (i) $\forall (x,y)\in\mathbb{R}_+^2,\ f(x+y)\geqslant f(x)+f(y)$.
   (ii) $\exists M>0,\ \forall t\in\mathbb{R}_+,\ |f(t)|\leqslant Mt$.
   Etudier l'existence des limites de $t\mapsto\dfrac{f(t)}{t}$ en 0^+ et $+\infty$. Si elles existent on les note α et β. Comparer alors f avec les applications $t\longmapsto\alpha t$ et $t\longmapsto\beta t$. *(Oral X 1996)*
