

Fiche d'exercices

Thème : Limites

MPSI 3 - 2004/2005
Chapitre : 8

Calculer, si elles existent, les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x}$
3. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x^{x^x} - x}$
4. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos x)^{\ln x}$
5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \tan x - \tan(2x)}{x(1 - \cos 3x)}$
6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{(x+1)(x+2)\dots(x+n)} - x$
7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}$
8. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{\sin x}}$
9. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1 + \sin x)^{\frac{\ln x}{x}} - x}{x^2 \ln x}$
10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\tan^2 x}$
11. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left((x+1)^{\frac{1}{x}} - x^{\frac{1}{x}} \right) (x \ln x)^2}{x^{x^{1/x}} - x}$
12. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\operatorname{ch} \sqrt{x+1} - \operatorname{ch} \sqrt{x})^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$
13. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} \arccos \left(\frac{\ln(1 + \sin x)}{x} \right)$
14. $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sin \ln x - \sqrt{|\ln(\sin \frac{\pi x}{2})|}}{x - 1}$
15. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\sin x)^x - x^{\sin x}}{(\sin x)^{\tan x} - (\tan x)^{\sin x}}$
16. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1+a^x}{2} \right)^{1/x}, a > 0$
17. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1+a^x}{2} \right)^{1/x}, a > 0$
18. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1^{\frac{p}{n}} + 2^{\frac{p}{n}} + \dots + p^{\frac{p}{n}}}{p} \right)^n, p \in \mathbb{N}^*$
19. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left((x+1)^{\frac{1}{x}} - x^{\frac{1}{x}} \right) (x \ln x)^2}{x^{x^{1/x}} - x}$

Calculer les DL en 0 des fonctions suivantes à l'ordre indiqué entre parenthèse.

1. $\ln(\cos x)$ (4)
2. $(\cos x)^x$ (5)
3. $\frac{x^2}{\cos^2 x}$ (7)
4. $\ln(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})$ (3)
5. $\sqrt{1 + \sqrt{1+x}}$ (3)
6. $(1 + \sin x)^{\cos x}$ (4)
7. $e^{\sqrt{\ln(x+2)}}$ (2)
8. $\arctan(\cos x^2)$ (6)
9. $(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$ (4)
10. $(\operatorname{sh} x - \sin x)^2 (\tan x - \operatorname{th} x)^3$ (16)
11. $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\arcsin^2 x}$ (4)
12. $\arccos\left(\frac{\sin x}{x}\right)$ (5)

Exercices divers.

1. Équivalent en $\frac{\pi}{2}$ de $f(x) = \cos(\cos x) - \sin x$.
2. Équivalent en $+\infty$ de $f(x) = \left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x} \right)^x - 1$.
3. Équivalent en 0 de $f(x) = \operatorname{sh}(\sin x) - \sin(\operatorname{sh} x)$.
4. Déterminer le $DL_5(\pi/4)$ de $\ln(\tan x)$.
5. Trouver le $DL_3(\pi/6)$ de $e^{\sin x}$.
6. Soit $f(x) = x + \ln x$.
 - (a) Montrer que f réalise un C^∞ -difféomorphisme entre \mathbb{R}_+^* et \mathbb{R} .
 - (b) On pose $g = f^{-1}$. Trouver le $DL_2(1)$ de g .
 - (c) DAS à 3 termes de g en $+\infty$.
7. Déterminer le $DL_7(0)$ de $\tan x$ à l'aide de la relation $\tan(\arctan x) = x$.
8. L'équation $y^4 + y = x$ admet une unique solution en y lorsque x est dans un voisinage de 0. On la note $f(x)$. Justifier cela et trouver un développement limité à l'ordre 12 de f en 0.