

Pour les exercices qui suivent on se place dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure euclidienne canonique. Les résultats de géométrie plane accumulés depuis les Grecs sont évidemment considérables. Les énoncés ci-après sont extraits des oraux récents et donnent une bonne idée du savoir faire requis pour les concours.

1. **Partage équitable.** On considère 1000 points dans le plan. Montrer qu'il existe une droite ayant 500 points d'un côté et 500 points de l'autre. (Oral X)

2. **Produit de longueurs dans un polygone régulier.** Soit $Q_1, \dots, Q_n$ les sommets d'un polygone régulier inscrit dans un cercle de rayon égal à 1. Calculer le produit des $Q_1 Q_k$. (Oral ENS)

3. **Des puits et des fermes.**

- (a) Soit $FF'PP'$ un quadrilatère convexe. Montrer que $FP' + F'P < F'P' + FP$ (la somme des longueurs des diagonales est strictement supérieure à la somme des longueurs de deux côtés opposés).
- (b) En déduire que si on place n fermes $F_1, \dots, F_n$ et n puits $P_1, \dots, P_n$ dans le plan de telle sorte que 3 points quelconques ne soient pas alignés, il existe $\sigma \in \mathcal{S}_n$ telle que les segments $[F_i P_{\sigma(i)}]$ soient deux à deux disjoints. Chaque fermier peut aller à son puit sans croiser personne !

4. **Orthocentre d'un triangle.**

Soit (A, B, C) un triangle. Montrer l'existence d'un point M tel que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA}$. Montrer que les hauteurs d'un triangle sont concourantes en un point H . Montrer que H est aligné avec le centre de gravité G et le centre du cercle circonscrit O . (Oral X)

5. **Alignement de points.**

- (a) Soit (A, B, C) un triangle et A', B', C' trois points quelconques respectivement sur (BC) , (AC) et (AB) . Montrer qu'il existe un unique D tel que $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DA'} = \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DB'} = \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DC'}$.
- (b) Soit 4 droites $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ en position générale. On note $A_{i,j}$ l'intersection de Δ_i et Δ_j pour $i < j$. Soit A'_i un point de Δ_i . On définit le point D_4 à partir des points $A_{1,2}, A_{1,3}, A_{2,3}, A'_3, A'_2, A'_1$ comme D à partir de A, B, C, A', B', C' dans la question a. On définit de même D_1, D_2 et D_3 . Montrer que les quatre points D_i sont alignés. (Oral X)

6. **Point de Gergonne.**

Soit (A, B, C) un triangle de cercle circonscrit Γ . Les tangentes à Γ en A et B se coupent en C' . On définit de même A' et B' . Montrer que les droites (AA') , (BB') et (CC') sont concourantes. (Oral X)

7. **Puissance d'un point par rapport à un cercle.**

Soit (C) un cercle du plan et O un point fixe.

- (a) A toute droite D passant par O coupant (C) on associe les points d'intersection A et B de (C) et D . Montrer que $OA \cdot OB$ est constant.
- (b) On suppose que $O \in (C)$ et on considère la tangente T à (C) en O' le point diamétralement opposé à O . A toute droite D passant par O et recoupant (C) on associe le point d'intersection $A \neq O$ de (C) et D ainsi que le point d'intersection B de T et D . Montrer que $OA \cdot OB$ est constant. (Oral X)

8. **Cercles tangents à deux droites.** Construire les cercles passant par un point donné et tangents à deux droites orthogonales du plan données. (Oral Mines)
-
9. **Construction à la règle.** Soit (C) un cercle de diamètre $[A, B]$. Construire le projeté orthogonal d'un point M de (C) sur la droite (AB) avec uniquement une règle. (Oral Mines)
-
10. **Cercle d'Euler.** Soit $T = (A, B, C)$ un triangle, O le centre du cercle circonscrit Γ au triangle, H l'orthocentre et G le centre de gravité de T .
- (a) Montrer que les symétriques de H par rapport aux côtés du triangle et les symétriques de H par rapport aux milieux des côtés appartiennent à Γ .
 - (b) Soient A', B', C' les milieux des côtés $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$, h l'homothétie de centre G et de rapport $-1/2$. Préciser $h(A), h(B), h(C), h(H), h(\Gamma)$. Le cercle $\Gamma' = h(\Gamma)$ est appelé *cercle d'Euler*, ou encore *cercle des 9 points* de T . Montrer en effet qu'il contient les points A', B', C' , les pieds des hauteurs et les milieux des segments $[AH]$, $[BH]$ et $[CH]$.
-
11. **Droite de Simson.**
- Soit $T = (A, B, C)$ un triangle, Γ son cercle circonscrit. Montrer qu'un point M appartient à Γ si et seulement si ses projetés orthogonaux sur les côtés de T sont alignés. La droite contenant ces trois projetés est appelé *droite de Simson* du point $M \in \Gamma$. On la note Δ_M . Préciser $\Delta_A, \Delta_B, \Delta_C$.
-
12. **L'inversion.**
- On appelle *inversion de pole* $P \in \mathbb{R}^2$ et de rapport $k \in \mathbb{R}^*$, l'application qui à $M \neq P$ associe le point M' appartenant à (PM) et tel que $\overline{PM'} \cdot \overline{PM} = k$. On note $I(P, k)$ cette inversion.
- (a) Reconnaître la transformation $I(P, k) \circ I(P, k')$. En déduire que $I(P, k)$ est une bijection de $\mathbb{R}^2 \setminus P$ sur lui-même.
 - (b) Quelle est l'image d'une droite passant par P par une inversion de pole P ? Quelle est l'image d'un cercle passant par P ?
 - (c) Soit C un cercle ne passant pas par P . Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $I(P, \lambda)(C) = C$. En déduire que l'image de C par $I(P, k)$ est un cercle.
-
13. **Formule de Héron, II^{ème} siècle BC.** Soit (A, B, C) un triangle de demi-périmètre p et dont les longueurs des côtés sont a, b, c . Montrer que l'aire du triangle est $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. Quels sont les triangles de demi-périmètre p donné et d'aire maximale ? (Oral Mines)
-
14. Soit $M \in \mathbb{R}^2$. On note P et Q les projetés orthogonaux de M sur les axes du repère canonique R et $f(M)$ le projeté de M sur la droite (PQ) . Etudier la suite $M_{n+1} = f(M_n)$, $M_0 = M$. (Oral Mines)
-
15. **Coloriage.** On colorie le plan avec deux couleurs. Montrer qu'on peut trouver un triangle rectangle isocèle dont les trois sommets soient de même couleur.
-
16. **Théorème de Sylvester.** On considère un ensemble fini de points dans le plan $\mathbb{R}^2$, ces points n'étant pas tous alignés. Montrer qu'il existe une droite qui ne contient que 2 des points.
- Autre formulation : si toute droite passant par deux des points en contient un troisième, alors ils sont tous alignés. Il est intéressant d'observer que ce problème est de nature purement affine mais que la solution utilise la structure euclidienne. Cela est presque obligatoire : un contre-exemple a été construit sur un corps différent de $\mathbb{R}$.*