Fiche d'exercices
Thème : Polynômes (structure d'algèbre)

MPSI 3 - 2004/2005
Chapitre : 15

Dans tout ce qui suit, lorsque rien n'est précisé, $\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif quelconque.

1. ***Bases de $\mathbb{K}[X]$.**

   (a) Soit (P_n) une suite de polynômes non nuls de $\mathbb{K}[X]$ telle que $\deg(P_{n+1}) > \deg(P_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille libre de $\mathbb{K}[X]$.

   (b) Il ne faut pas penser que la condition suffisante de liberté qui précède est nécessaire : donner une famille libre formée de n polynômes qui ont le même degré.

   (c) Soit (P_n) une suite de polynômes telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\deg(P_n) = n$. Montrer que (P_n) est une base de $\mathbb{K}[X]$. *Bien entendu, ici aussi il n'y a pas de réciproque.*

   (d) En déduire qu'un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$ qui conserve le degré est un isomorphisme.

---

2. ****Morphismes d'algèbre.**

   (a) Soit $\varphi : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X]$ un morphisme d'algèbre. On pose $Q = \varphi(X)$. Expliciter $\varphi(P)$ en fonction de P et de Q pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$. En déduire tous les morphismes d'algèbre de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{K}[X]$.

   (b) Parmi les morphismes précédents, préciser les automorphismes.

---

3. ****Opérateur de dérivation discrète.**

   On note Δ l'application de $\mathbb{C}[X]$ dans lui-même qui à P associe $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$.

   (a) Montrer que Δ est linéaire.

   (b) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \geqslant 1$. Quel est le degré du polynôme $\Delta(P)$? En déduire le noyau de Δ.

   (c) Que vaut l'image de $\mathbb{C}_n[X]$ par Δ ? En déduire l'image de Δ.

   (d) Pour $p \in \mathbb{N}$, justifier l'existence d'un unique polynôme Q_p tel que $\Delta(Q_p) = X^p$ et $Q_p(0) = 0$.

   (e) Quel intérêt présente ce polynôme Q_p pour le calcul de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^p$?

   (f) Calculer Q_0, Q_1, Q_2. Expliquer comment on peut calculer les Q_p par récurrence.

---

4. ***Une base (1).**

   Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $0 \leqslant k \leqslant n$ on considère les polynômes $P_k = X^k(1-X)^{n-k}$. Montrer que $(P_0, ..., P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

---

5. ******Une base (2).**

   Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ de degré n et $a_0, a_1, ..., a_n$ des réeels deux à deux distincts. Montrer que la famille $(P(X+a_0), P(X+a_1), ..., P(X+a_n))$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

---

6. **Facile.** Montrer que $\{P \in \mathbb{R}_n[X],\ P(0) = P(1)\}$ est un espace vectoriel et trouver sa dimension.

---

7. **Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ de dimension $n \geqslant 1$.

   Déterminer le cardinal de $\{\deg P,\ P \in E \setminus \{0\}\}$.

---

8. **Trouver les $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(X^2) = (X^n + 1)P(X)$. *Utiliser l'exercice ci-dessus !*
