1. ****Un cas élémentaire du théorème de Dirichlet.**

   Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à -1 modulo 4 (resp. modulo 6). *C'est un grand classique d'oral des concours. Le grand théorème de Dirichlet affirme que toute suite arithmétique $(an+b)_{n\geqslant 0}$ avec $a, b \in \mathbb{N}^*$ et pgcd $(a,b) = 1$ contient une infinité de nombre premiers. Ici il s'agit des suites $(4n+3)_{n\geqslant 0}$ et $(6n+5)_{n\geqslant 0}$.*

---

2. ****Intervalles sans nombres premiers.**

   Soit $k \geqslant 1$. Montrer qu'il existe un intervalle $[\![a, a+k]\!]$ ne contenant aucun nombre premier.

   Encore un grand classique, posé chaque année aux oraux. Autre formulation : si $(p_n)_{n\geqslant 1}$ est la suite croissante des nombres premiers, la suite $p_{n+1} - p_n$ n'est pas majorée. Elle est minorée par 2 et une question ouverte est de savoir si elle prend une infinité de fois cette valeur (cf. exo suivant).

---

3. ***Premiers jumeaux.**

   Soient p et q deux nombres premiers. On dit qu'ils sont jumeaux si $|p-q| = 2$. C'est par exemple le cas de $(3,5)$ $(5,7)$ $(11,13)$ $(17,19)$...

   (a) Soient p, q deux nombres premiers. Montrer que p, q sont jumeaux si et seulement si $pq+1$ est un carré.

   (b) Si p, q sont jumeaux et $\geqslant 5$, montrer que $p+q$ est divisible par 12.
   L'existence d'une infinité de nombres premiers jumeaux est un célèbre problème ouvert...

---

4. ***Deux questions faciles sur la factorialité de $\mathbb{Z}$.**

   (a) Soit a, b deux entiers naturels. Est-il vrai que si $a^2 | b^2$ alors $a | b$?

   (b) Soit a, b deux entiers naturels premiers entre eux. Montrer que si ab est un carré alors a et b sont des carrés. Le résultat reste-t-il vrai si a et b ne sont pas supposés premiers entre eux ?

   (c) Même question en remplaçant carré par puissance k-ième.

---

5. ****Nombres de Mersenne.** Soit $a \geqslant 2$ et $n \geqslant 2$ deux entiers. Montrer que si $a^n - 1$ est premier, alors $a = 2$ et n est premier. *Les entiers $M_p = 2^p - 1$ avec p premier sont appelés nombres de Mersenne. On dispose pour les entiers de la forme $2^p - 1$ d'un critère de primalité assez efficace. Cela explique que les plus grands nombres premiers actuellement connus soient des nombres de Mersenne. Voir le site* httt://www.mersenne.org *pour les dernières informations.*

---

6. *****Valuation p-adique de $n!$** Soit p un nombre premier.

   (a) Montrer que $\nu_p(n!) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} E\left(\frac{n}{p^k}\right)$. *Résultat établi par Legendre en 1808. C'est une question très classique.*

   (b) Par combien de zéros se termine l'écriture décimale de 2005!.

   (c) Montrer que pour tout $(n,m) \in \mathbb{N}^2$, $\dfrac{(2n)!(2m)!}{n!m!(m+n)!}$ est un entier. *(Posé à l'X en 2003)*

---

7. **Nombres de Fermat.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n = 2^{2^n} + 1$: F_n est le n-ième nombre de Fermat.

(a) Calculer F_n pour $0 \leqslant n \leqslant 4$ et vérifier qu'ils sont premiers (utiliser une table, ou Maple).

(b) En observant que $641 = 5^4 + 2^4 = 1 + 5.2^7$, montrer que F_5 est divisible par 641. La conjecture de Fermat "tous les F_n sont premiers" est donc fausse.

(c) Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Prouver que si $2^m + 1$ est premier alors m est une puissance de 2.

(d) Montrer que pour tout $n > 1$, F_n se termine par un 7 en écriture décimale. Prouver que si n est congru à 0 (resp. $1, 2, 3$) modulo 4, alors F_n se termine par 37 (resp. $97, 17, 57$).

(e) Prouver que si $n \neq m$, alors F_n et F_m sont premiers entre eux. En déduire une nouvelle preuve de l'existence d'une infinité de nombres premiers.

On ne connait pas d'autres F_n premiers que ceux vus ci-dessus. Pour $5 \leqslant n \leqslant 11$, on sait que F_n est composé et on connait sa factorisation. Par exemple $F_6 = 274177.67280421310721$. Le plus grand F_n composé connu est F_{23471}. On sait que F_{14} est composé mais on n'en connait aucun facteur premier. On sait que $F_{10} = 4559257.6487031809.m$ où m est un entier composé de 291 chiffres dont on recherhce acitvement la factorisation. Le plus petit nombre de Fermat dont on ne sait pas s'il est premier ou composé est F_{22}. On conjecture actuellement qu'il n'y a qu'un nombre fini de F_n premiers.

---

8. **Produits des nombres premiers $\leqslant n$.

On note α_n le produit de tous les nombres premiers inférieurs ou égaux à n : $\alpha_n = \prod_{p \leqslant n} p$ (par convention, la lettre p désigne un nombre premier).

(a) Soit $m \in \mathbb{N}$. Montrer que $C_{2m+1}^m \leqslant 4^m$.

(b) Montrer que tout nombre premier p vérifiant $m + 1 < p \leqslant 2m + 1$ divise C_{2m+1}^m. En déduire que

$$\prod_{m+1<p\leqslant 2m+1} p \leqslant 4^m$$

(c) Prouver que $\alpha_n \leqslant 4^n$.

Une étude plus fine montre que $\alpha_n \leqslant c^n$ pour tout $n \geqslant 1$ avec $c = 2,82590...$ C'est le meilleur coefficient possible : il y a égalité pour $n = 113$ et seulement dans ce cas (théorème prouvé par Rosser et Schoenfeld en 1962).

---

9. **Somme partielle de la série harmonique.

Montrer que pour $n \geqslant 2$, $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ n'est jamais entier.

---

10. **Théorème de Wilson.

Soit $p \geqslant 2$. Montrer que p est premier si et seulement si $(p-1)! \equiv -1\ [p]$. Ce critère de primalité a-t-il un intérêt pratique ?

---

11. ***On note $d_1(n)$ (resp. $d_3(n)$) le nombre de diviseur de n congru à 1 (resp. 3) modulo 4.

(a) Montrer que $d_1(n) \geqslant d_3(n)$ pour tout n.

(b) Montrer qu'il y a égalité (resp. inégalité stricte) pour une infinité de valeurs de n.

(c) Montrer que $\sum_{k=1}^{n} d_1(k) - d_3(k) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j E\left(\frac{n}{2j+1}\right)$.
