Tous les exercices se placent sur $\mathbb{C}$ ou sur un sous-corps de $\mathbb{C}$. On identifie donc tout polynôme formel avec la fonction poynomiale qui lui est associée.

1. *__La conjugaison est-elle polynomiale ?__

   Existe-t-il un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(z) = \bar{z}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$?

---

2. *__Injectivité, surjectivité.__

   (a) Déterminer les polynômes complexes qui sont injectifs.

   (b) Déterminer les polynômes complexes qui sont surjectifs. En déduire les polynômes bijectifs.

   (c) Quels sont les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $z \longmapsto P(z)$ soit périodique ?

---

3. **__Polynômes stabilisant le cercle unité.__

   On note $U = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$ le cercle unité du plan complexe et $E = \{P \in \mathbb{C}[X],\ P(U) \subset U\}$ l'ensemble des polynômes qui stabilisent U.

   (a) Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ avec $a_n \neq 0$. On pose $\widehat{P} = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_{n-k}} X^k$. Montrer que pour $z \in U$, $\widehat{P}(z) = z^n \overline{P(z)}$.

   (b) Si $P \in E$, que vaut $P\widehat{P}$? Déterminer l'ensemble E.

---

4. *__Racine dans $\mathbb{Z}$.__

   Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $P(0)$ et $P(1)$ soient impairs. Montrer que P n'a pas de racine dans $\mathbb{Z}$.

---

5. *__Racines rationnelles.__

   (a) Soit $P(X) = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$ et $r = \dfrac{p}{q}$ (avec pgcd $(p, q) = 1$) une racine rationnelle non nulle de P. Montrer que $p | a_0$ et que $q | a_n$.

   (b) Application : trouver les racines rationnelles puis la factorisation dans $\mathbb{Q}[X]$ du polynôme $P(X) = 2X^5 - 5X^4 - 21X^3 - 15X^2 - 23X - 10$.

---

6. **__Racines non réelles distinctes.__

   Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ ayant toutes ses racines réelles et simples. Soit $a > 0$. Montrer que $P^2 + a^2$ a toutes ses racines complexes et deux à deux distinctes.

---

7. **__Racine double.__

   Soient P et Q deux polynômes complexes non nuls et premiers entre eux. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ une racine double de $P^2 + Q^2$. Montrer que α est racine de $P'^2 + Q'^2$.

---

8. **__Existence d'une racine réelle strictement positive.__

   Soient $a_0, a_1, ..., a_n$ $(n \geqslant 1)$ des réels positifs ou nuls, et $P = a_n X^n + \cdots + a_k X^k - a_{k-1} X^{k-1} - \cdots - a_0$, $(1 \leqslant k \leqslant n)$. On suppose $a_n > 0$ et $a_0 + \cdots + a_{k-1} > 0$. Montrer que P possède une unique racine réelle strictement positive. *On peut procéder par récurrence sur n ou étudier une fonction judicieusement choisie.*

---

9. ***Application du théorème de Rolle.** *Ce résultat est très important.*

   (a) Montrer que si $P \in \mathbb{R}[X]$ est scindé, alors il en est de même de P'.

   (b) Même question en remplaçant scindé par scindé à racines simples.

   (c) Montrer par exemple que $P = [(X^2-1)^n]^{(n)}$ est scindé à racines simples, toutes dans l'intervalle ouvert $]-1,1[$.

---

10. ****Un théorème d'Euler.**

    Soit $n \geqslant 1$, et $P = a_0 + \cdots + a_n X^n \in \mathbb{R}[X]$ de degré n supposé scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$.

    (a) Montrer que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $P^{(k)}$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$.

    (b) En étudiant la fonction $x \mapsto \dfrac{P'(x)}{P(x)}$ montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x)P''(x) < P'^2(x)$.

    (c) En utilisant les polynômes $P^{(k-1)}P^{(k+1)} - [P^{(k)}]^2$ montrer que pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$ on a $a_{k-1}a_{k+1} < a_k^2$. En déduire en particulier, que P ne peut avoir deux coefficients consécutifs nuls.

---

11. *****Polynôme scindé sur $\mathbb{R}$.** Soit $\lambda > 0$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \geqslant 1$ scindé sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'il en est de même du polynôme $Q = \lambda P + XP'$. *(Oral X)*

---

12. ****Condition pour qu'un polynôme réel soit scindé.**

    Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire et de degré $n \geqslant 1$. Montrer que P est scindé sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $|P(z)| \geqslant |\mathrm{Im}\, z|^n$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. *(Oral Centrale)*

---

13. ***Nombre de racines distinctes.**

    Montrer que le nombre de racines distinctes de $P \in \mathbb{C}[X]$ vaut $\deg P - \deg D$ où $D = \mathrm{pgcd}\,(P, P')$. *Ce résultat est très important : voici par exemples deux oraux récents de l'X qui l'utilisent...*

---

14. *****Cardinal de l'image réciproque d'un ensemble fini.**

    Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant et E un sous-ensemble fini de $\mathbb{C}$.

    Montrer que $|P^{-1}(E)| \geqslant (|E|-1)\deg P + 1$. *(Oral X)*

---

15. *****Nombre de racines d'une équation polynomiale.**

    Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $d \geqslant 1$. On note $n(z)$ le nombre de racines de l'équation $P(x) = z$. Donner une expression de $\displaystyle\sum_{z \in \mathbb{C}} (d - n(z))$. *(Oral X)*

---

16. ****Factorisation d'un polynôme.**

    (a) Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $P = (X+i)^n - (X-i)^n$.

    (b) En déduire une expression simple de $\displaystyle\prod_{k=1}^{m}\left(4 + \mathrm{cotan}^2 \frac{k\pi}{2m+1}\right)$.

---

17. **Une factorisation dans $\mathbb{R}[X]$.**

    Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Factoriser en irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $P = X^{2n} + 1$.

---

18. ****Racines d'un polynôme de degré 3.**
Soit $a = \dfrac{1 - i\sqrt{7}}{2}$ et $P(X) = X^3 + aX^2 - \overline{a}X - 1$. Montrer que $P(X)$ divise $P(X^2)$. En déduire les racines de P. *(Oral Centrale)*

---

19. ****Sommes de deux carrés de l'anneau $\mathbb{R}[X]$.**
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non nul et unitaire. Montrer qu'il y a équivalence entre les propositions suivantes :
(i) pour tout réel x, $P(x) \geqslant 0$.
(ii) toute racine réelle de P est de multiplicité paire.
(iii) il existe $(A, B) \in \mathbb{R}[X]^2$ tel que $P = A^2 + B^2$.
(iv) il existe $C \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P = C\bar{C}$.

---

20. *****Equation fonctionnelle (1).**
Trouver les $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(X) = P(1 - X)$. *(Oral X)*

---

21. *****Equation fonctionnelle (2).**
Trouver les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ tels que $P(X^2) = P(X)P(X + 1)$.

---

22. ****Equation fonctionnelle (3).**
Quels sont les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$? *(Oral Mines)*

---

23. ****Une extention algébrique de degré 3.**
Soit $P(X) = X^3 - X^2 - 2X + 1$.
   (a) Montrer que les trois racines de P sont réelles.
   (b) Montrer que les racines de P ne sont pas dans $\mathbb{Q}$.
   (c) Soit θ une racine de P. On pose $\mathbb{Q}[\theta] = \{a + b\theta + c\theta^2,\ (a, b, c) \in \mathbb{Q}^3\}$. Montrer que $\mathbb{Q}[\theta]$ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel. Quelle est sa dimension ?
   (d) Montrer que $\mathbb{Q}[\theta]$ est un corps. *(Oral X)*

---

24. ****Un nombre algébrique.**
Trouver un polynôme à coefficients entiers ayant $\alpha = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ pour racine. *(Oral Centrale)*

---

25. *****Séparabilité.** *(Oral Centrale)*
Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$ un polynôme irréductible. Montrer que les racines complexes de Q sont toutes simples.

---

26. **Pour touts les ages...** Discussion entre deux mathématiciens :
-"Tu dois trouver l'âge de mon fils sachant qu'il est racine d'un polynôme à coefficients entiers P ?
-Je crois qu'il a 7 ans.
-Ah non, $P(7) = 77$. Il est plus agé.
-Dans ce cas il a le même âge que mon chien.
-Ah non, si y est l'âge de ton chien, $P(y) = 85$. Il est encore plus agé.
-C'est bon, avec toutes ces informations j'ai trouvé".
Et vous ? Quel est l'âge du fils ? Et celui du chien ?
