Fiche d'exercices
Thème : Rang d'un matrice

MPSI 3 - 2004/2005
Chapitre : 16

---

1. **Sur la non-intégrité de $M_n(\mathbb{K})$.**
   (a) Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, $M_n(\mathbb{K})$ n'est pas intègre.
   (b) Soit A, B deux matrices de $M_n(\mathbb{K})$. Si $AB = 0$ a-t-on nécessairement $BA = 0$? Donner un contre-exemple.
   (c) **On dit que $A \in M_n(K)$ est diviseur de 0 à gauche (resp à droite, bilatère) s'il existe B non nulle telle que $AB = 0$ (resp $BA = 0$, $AB = BA = 0$). Montrer qu'il y a équivalence entre :
   (i) rg $A < n$
   (ii) A est diviseur de 0 à gauche
   (iii) A est diviseur de 0 à droite
   (iv) A est diviseur de 0 bilatère
   (d) ***Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Montrer que l'ensemble des matrices $B \in M_n(K)$ telles que $AB = 0$ est un espace vectoriel et donner sa dimension en fonction de n et du rang de A. Même question pour l'ensemble des matrices B telles que $BA = 0$.

---

2. *Déterminer les matrices de $M_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec toutes les matrices de rang 1. *(Oral Mines)*

---

3. ****Sur les matrices de rang 1.**
   (a) Montrer que $A \in M_n(\mathbb{K})$ est de rang 1 si et seulement si il existe X, Y deux vecteurs colonnes non nuls de $M_{n,1}(\mathbb{K})$ tels que $A = X{}^tY$.
   (b) Soient $A = X{}^tY$ et $A' = X'{}^tY'$ deux matrices de rang 1. A quelle condition A et A' sont-elles colinéaires ? A quelle condition a-t-on $A = A'$?
   (c) Soit $A = X{}^tY$ de rang 1. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

---

4. **Montrer que toute matrice de $M_n(\mathbb{C})$ est somme de deux matrices inversibles. En déduire Vect $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

---

5. ****Applications multiplicatives sur $M_n(\mathbb{C})$.**
   Soit $f : M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ une application non constante vérifiant $f(AB) = f(A)f(B)$ pour tout couple $(A, B) \in M_n(\mathbb{C})^2$. Pour $A \in M_n(\mathbb{C})$, montrer que A est inversible si et seulement si $f(A) \neq 0$.

---

6. **Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et L un surcorps de $\mathbb{K}$. Montrer que le rang de A comme matrice de $M_{n,p}(\mathbb{K})$ est le même que son rang en tant que matrice de $M_{n,p}(L)$. *On dit que le rang est invariant par extension de corps.*

---

7. On considère la matrice $A_\alpha \in M_n(\mathbb{R})$ définie par $a_{ij} = \cos(i + j - 2)\alpha$. Calculer rg A_α.

---

8. ****Théorème d'Hadamard.**
   Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$. On fait l'hypothèse que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$. Montrer que A est inversible. *Considérer un vecteur du noyau...*

---

9. **Factorisation selon le rang.** Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ de rang r. Montrer qu'il existe $F \in M_{n,r}(\mathbb{R})$ et $G \in M_{r,p}(\mathbb{R})$ telles que $A = FG$. Quel est alors le rang de F et de G ? Y a-t-il unicité de F et G ?