

1. **Calculs de sommes.** Les séries convergentes dont les sommes se calculent exactement sont assez rares. Cela passe presque toujours par la recherche d'une formule close pour les sommes partielles. Voici quelques exemples de sommes à calculer :

(a) $^* \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$; $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln n - 2 \ln(n+1) + \ln(n+2)$.

(b) $^{**} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E(\sqrt{n+1}) - E(\sqrt{n})}{n}$. On regardera quand le numérateur est non nul...

(c) $^{***} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s(n)}{n(n+1)}$ où $s(n)$ est le nombre de chiffres de l'écriture binaire de n .

2. ****Majoration, minoration.** Dans les exercices qui suivent, on cherchera à majorer ou minorer le terme général de la série à étudier.

- (a) Soit $\sum a_n$ une série à termes positifs convergente. Quelle est la nature de la série $\sum \frac{\sqrt{a_n}}{n}$?
Penser à une inégalité très classique...
- (b) Soit (u_n) une suite de réels positifs et pour tout n , $v_n = \sqrt{u_n u_{n+1}}$. Montrer que si $\sum u_n$ converge alors $\sum v_n$ converge et construire un contre-exemple à la réciproque. Même indication.
- (c) Montrer que la série $\sum e^{-\sqrt{\ln n}}$ diverge.
-

3. ****Moyenne de n termes consécutifs.**

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite réelle positive. On pose $v_n = \frac{u_n + u_{n+1} + \dots + u_{2n-1}}{n}$ pour tout $n \geq 1$. Montrer que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

4. ****Entiers s'écrivant sans le chiffre 0.**

On pose $u_n = \frac{1}{n}$ si n ne contient pas le chiffre 0 dans son écriture décimale et $u_n = 0$ sinon. Montrer que la série $\sum u_n$ converge et encadrer sa somme.

5. ***Série associée à une suite récurrente (1).**

Soit (u_n) la suite définie par $0 < u_0 < 1$ et pour tout n , $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

- (a) Etudier la monotonie et la convergence de la suite (u_n) .
- (b) Montrer que la série $\sum u_n^2$ converge et calculer sa somme.
-

6. ***Série associée à une suite récurrente (2).**

On définit la suite (u_n) par récurrence par $u_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$.

- (a) Etablir une relation entre u_{n+1} , u_0 et $U_n = \sum_{k=0}^n u_k$.
- (b) En déduire la nature de la série $\sum u_n$.
-

7. ***Une identité de Lehmer (1936)** On rappelle que les nombres de Fibonacci sont définis par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

(a) Montrer que $\forall n \geq 0$, $\arctan \frac{1}{F_{2n+1}} = \arctan \frac{1}{F_{2n}} - \arctan \frac{1}{F_{2n+2}}$.

(b) En déduire que $\sum_{n=1}^{+\infty} \arctan \frac{1}{F_{2n+1}} = \frac{\pi}{4}$.

8. ****Le critère de la loupe.**

Soit (u_n) une suite réelle décroissante de limite nulle.

(a) Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum 2^n u_{2^n}$ sont de même nature.

(b) Montrer que la série $\sum \frac{1}{n \ln n}$ diverge.

(c) En déduire que si $\sum u_n$ diverge, la série $\sum \min\left(u_n, \frac{1}{n}\right)$ diverge.

9. ***Somme par paquets.**

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite réelle et (k_n) une suite strictement croissante d'entiers avec $k_0 = 0$. On pose pour tout n , $s_n = \sum_{k=k_n}^{k_{n+1}-1} u_k$. On veut comparer la série $\sum u_n$ avec la série des paquets $\sum s_n$.

(a) Montrer que si $\sum u_n$ converge, alors $\sum s_n$ converge et que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} s_n$.

(b) Montrer par un exemple que la réciproque est fautive : la convergence de $\sum s_n$ n'implique pas forcément la convergence de $\sum u_n$.

(c) Montrer toutefois que la réciproque est vraie quand $\sum u_n$ est une série à termes positifs.

(d) ***Pour $n \geq 2$ fixé montrer que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k - nE(k/n)}{k(k+1)} = \ln n$.

10. ****Permutation des termes.**

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite de réels positifs. On suppose que la série $\sum u_n$ converge. Soit σ une permutation de $\mathbb{N}$. Montrer que la série $\sum u_{\sigma(n)}$ converge et que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

11. ***Soit σ une permutation de $\mathbb{N}^*$. Montrer que la série $\sum \frac{\sigma(n)}{n^2}$ diverge.
-

12. ****Un classique.** Soit (u_n) une suite strictement positive, décroissante, de limite nulle.

(a) Montrer que si $\sum u_n$ converge alors la suite (nu_n) tend vers 0.

(b) Le résultat demeure-t-il si (u_n) n'est pas décroissante ? La réciproque est-elle vraie ?

13. *****Séries des inverses des nombres premiers.**

On note p_n le n -ième nombre premier. Montrer que la série $\sum \frac{1}{p_n}$ diverge.
