1. **Recherche d'exemples.**

   (a) Donner un exemple de fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, continue, sommable sur $\mathbb{R}_+$ et non bornée.

   (b) Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, sommable sur $\mathbb{R}_+$ qui admet une limite $l$ en $+\infty$. Montrer que $l = 0$. Donner un exemple d'une fonction sommable sur $\mathbb{R}^+$ n'ayant pas de limite en $+\infty$.

   (c) Donner un exemple de fonction de classe $C^\infty$, strictement positive et sommable sur $\mathbb{R}$.

---

2. **Etudes de sommabilité (abstraites).**

   (a) Soit $f : ]a, b[ \to \mathbb{R}$ continue par morceaux et bornée. Montrer que $f$ est sommable sur $]a, b[$.
   Par exemple $x \longmapsto \sin \dfrac{1}{x^2}$ est sommable sur $]0, 1[$.

   (b) Soit $F \in \mathbb{R}(X)$ une fraction rationnelle. A quelle condition $x \mapsto F(x)$ est-elle sommable sur $\mathbb{R}$ ?

   (c) Soit $f : [1, +\infty[ \to \mathbb{R}$ sommable. Montrer que $g : x \longmapsto \dfrac{f(x)}{x}$ est sommable sur $[1, +\infty[$.

   (d) Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue et dérivable en 0 avec $f(0) = f'(0) = 0$. La fonction $x \longmapsto \dfrac{f(x)}{x^{3/2}}$ est-elle sommable sur $]0, 1]$ ?

   (e) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et sommable. Etudier la sommabilité sur $\mathbb{R}$ de la fonction $\arctan f$.

---

3. **Etudes de sommabilité (concrètes).**

   Etudier dans chacun des cas la sommabilité de la fonction $f$ sur l'intervalle $I$ proposé (on discutera éventuellement selon les paramètres réels $\alpha, \beta, ...$).

   (a) $f : x \longmapsto x^\alpha \ln(x + 1)$ et $I = ]0, +\infty[$.

   (b) $f : x \longmapsto \sin x \exp(-E(\sqrt{x}))$ et $I = [0, +\infty[$.

   (c) $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\operatorname{ch}(x + \sin x)}$ et $I = [0, +\infty[$.

   (d) $f : x \longmapsto \dfrac{x^\alpha \ln x}{1 + x^2}$ et $I = ]0, +\infty[$.

   (e) $f : x \longmapsto \ln \operatorname{th} x$ et $I = ]0, +\infty[$.

   (f) $f : x \longmapsto \dfrac{x^\alpha}{1 + x^\beta}$ et $I = [1, +\infty[$ puis sur $I = ]0, 1]$.

   (g) $f : x \longmapsto x^2 |\cos x|^\alpha$ et $I = [0, +\infty[$ $(\alpha > 0)$.

   (h) $f : x \longmapsto \dfrac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}}$ et $I = ]0, 1[$.

   (i) $f : x \longmapsto \dfrac{\arctan 1/x}{x^\alpha}$ et $I = ]0, 1]$.

   (j) $f : x \longmapsto (e^{\alpha x} - 1)x^\beta$ et $I = ]0, +\infty[$.

   (k) $f : x \longmapsto \ln x \ln \left(1 + \frac{a^2}{x^2}\right)$ et $I = ]0, +\infty[$.

   (l) $f : x \longmapsto \dfrac{\sin ax \, \sin bx}{x^2}$ et $I = ]0, +\infty[$.

   (m) $f : x \longmapsto \sin x^2$ et $I = \mathbb{R}$.

   (n) $f : x \longmapsto \dfrac{\ln(1 + x^\alpha)}{x^\beta}$ et $I = ]0, +\infty[$.

   (o) $f : x \mapsto |\sin x|^x$ et $I = [1, +\infty[$.

4. Soit $I$ un intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ strictement positive. On suppose $f$ et $1/f$ sommables sur $I$. Montrer que $I$ est borné.

---

5. **Calculs d'intégrales généralisées.** Dans toutes les questions qui suivent on demande de calculer l'intégrale proposée après en avoir justifié l'existence.

   (a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx-x^2}dx$.

   (b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}x^n \sin x dx$ pour $n \in \mathbb{N}$.

   (c) $\displaystyle\int_a^b \frac{dt}{\sqrt{(t-a)(b-t)}}$ avec $a < b$.

   (d) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan x}$.

   (e) $\displaystyle\int_0^1 \arctan\sqrt{1-t^2}dt$.

   (f) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}+\sqrt{1-t^2}}$.

   (g) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx$.

   (h) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{(1-t)\sqrt{t(1-t)}}dt$. *Faire une intégration par parties...*

---

6. **Expression intégrale de la constante d'Euler.**

   On note $\{u\} = u - E(u)$ la partie fractionnaire du réel $u$. Montrer que la fonction $u \longmapsto \dfrac{\{u\}}{u^2}$ est continue par morceaux et sommable sur $[1, +\infty[$. Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\{u\}}{u^2}du = 1-\gamma$, où $\gamma$ est la constante d'Euler définie par $\gamma = \displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)$.

---

7. **Intégrales classiques.**

   On pose $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin t)dt$, $J = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\cos t)dt$ et $K = \displaystyle\int_0^{\pi} t\ln(\sin t)dt$.

   *Bien qu'on ne puisse pas expliciter les primitives des fonctions qui interviennent, on peut tout de même obtenir la valeur de ces intégrales.*

   (a) Montrer que les trois intégrales existent. Prouver que $I = J$.

   (b) En considérant $I + J$ déterminer la valeur de $I$. Calculer enfin $K$.

---