Fiche d'exercices — MPSI 3 - 2004/2005
Thème : Systèmes dynamiques discrets — Chapitre : 9

1. *La suite (x_n) définie par $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, $x_3 = \sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}}$, $\ldots x_n = \sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\sqrt{2}}}}}}$ (avec n racines de 2) converge-t-elle ? Si oui, quelle est sa limite ?

---

2. Soit $f(x) = x + \cos x$. Représenter le graphe de f après une étude sommaire. Préciser les points fixes. Déterminer le bassin d'attraction de chaque point fixe.

---

3. *Etudier la suite (u_n) définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + u_n}$. *(Centrale)*

---

4. *Etudier la convergence d'une suite u vérifiant $u_0 > 0$ et $0 < u_{n+1} \leqslant 2 - \dfrac{1}{u_n}$ pour tout n. *(Centrale)*

---

5. **Etudier la suite récurrente $u_{n+1} = \sin(2u_n)$ avec $0 \leqslant u_0 \leqslant \frac{\pi}{2}$.

---

6. **Soit $u_0 = 0$ et $\forall n$, $u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{u_n + 1}{2}}$. Etudier la suite de terme $v_n = u_1 u_2 \ldots u_n$. *(Mines)*
   Astuce : penser à la trigonométrie...

---

7. **Soit u définie par $u_0 \in]0, 1]$ et $u_{n+1} = u_n^2 E\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$. Montrer que la suite u converge et, que si elle n'est pas stationnaire sa limite est nulle. *(Centrale)*

---

8. **Soit $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et (u_n) la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. On suppose que (u_n) possède une unique valeur d'adhérence l et on se propose de montrer que (u_n) converge vers l.
   (a) Montrer que $f(l)$ est aussi une valeur d'adhérence de (u_n) et en déduire que l est point fixe de f.
   (b) On suppose par l'absurde que (u_n) ne converge pas vers l. Justifier l'existence de $\varepsilon > 0$ tel que $A = \{n \in \mathbb{N},\ |u_n - l| \geqslant \varepsilon\}$ soit infini.
   (c) Justifier l'existence d'un $\eta \in]0, \varepsilon[$ tel que $\forall x \in [l - \eta, l + \eta]$, $f(x) \in [l - \varepsilon, l + \varepsilon]$.
   (d) Montrer qu'il existe un rang N tel que $\forall n \geqslant N$, $u_n \notin [l - \varepsilon, l - \eta] \cup [l + \eta, l + \varepsilon]$.
   (e) Obtenir une contradiction et conclure. *A l'oral, l'exo peut se poser sans les indications...*

---

9. **Soit $f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ une fonction continue, admettant en 0 un développement asymptotique de la forme $f(x) = x - ax^\alpha + o(x^\alpha)$ où $a > 0$ et $\alpha > 1$.
   (a) Montrer que pour u_0 assez petit, la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, converge vers 0. On suppose u_0 ainsi choisi dans la suite.
   (b) Déterminer $\beta > 0$ tel que la suite $(u_{n+1}^{-\beta} - u_n^{-\beta})_{n \geqslant 0}$ ait une limite non nulle.
   (c) En appliquant le théorème de Cesaro, déterminer alors un équivalent de u_n.
   (d) Traiter l'exemple de la $f(x) = \sin x$ puis de la fonction $x \longmapsto \ln(1 + x)$.
   Cette technique est très importante et se retrouve dans beaucoup d'exercices dont les suivants.

---

10. Soit (x_n) définie par $x_0 > 0$ et $\forall n$, $x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{x_n}$.

    (a) Montrer que (x_n) diverge vers $+\infty$.

    (b) **En adaptant les idées de l'exercice précédent, déterminer un équivalent de x_n.

    (c) ***On prend $x_0 = 5$. Montrer que $45 < x_{1000} < 45{,}1$.

---

11. **Etudier la suite récurrente définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$. Donner un développement asymptotique du terme général. *(Polytechnique)*

---

12. Soit u définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

    (a) Etudier le comportement de u.

    (b) **Donner un développement asymptotique à deux termes de u quand elle converge vers 0.

    (c) ***Trouver un équivalent de u_n dans le cas où $u_n \to -\infty$. *(Mines)*

---

13. *Etudier la suite (u_n) définie par $u_0 = a > 0$, $u_1 = b > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_n}$.

---

14. **Soit (u_n) définie par $u_0 \geqslant 0$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \sqrt{u_n} + \frac{1}{n+1}$$

Etudier la convergence de la suite. *(Concours Général 1995, Centrale 97)*

---

15. (a) ***Soit (u_n) une suite réelle telle que $u_{n+1} - u_n$ tende vers 0. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite (u_n) est un segment.

    (b) ***Soit $f : [a, b] \to [a, b]$ continue et (u_n) définie par $u_0 \in [a, b]$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que (u_n) converge si et seulement si $u_{n+1} - u_n$ tend vers 0.

    (c) Une valeur d'adhérence d'une suite $u_{n+1} = f(u_n)$ est-elle toujours un point fixe de f?

---

16. ****Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ continue. On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $u_1 \in [0, 1]$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{f(u_1) + \cdots + f(u_n)}{n}$ pour tout n.

    Montrer que u converge vers un point fixe de f.
