1. Que dire d'une fonction continue sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{Q}$?

---

2. Soit P un polynôme à coefficients réels de degré impair. Montrer que P admet au moins une racine réelle. Donner pour tout $n \geqslant 1$ un polynôme réel de degré $2n$ qui n'admet pas de racine réelle.

---

3. *Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue.
   (a) Montrer que si $f([0,1]) \subset [0,1]$, f possède un point fixe.
   (b) Montrer que si $[0,1] \subset f([0,1])$, f possède un point fixe.

---

4. *Soit $f \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $f \circ f$ possède un point fixe. Montrer qu'alors f en possède aussi un.

---

5. *Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ continue telle que $f \circ f = f$. Montrer que l'ensemble des points fixes de f est un segment. Décrire l'allure de la fonction f.

---

6. **Soit I un intervalle non trivial, $f : I \to I$ continue. Si J est un segment de $f(I)$, montrer qu'il existe un segment K de I tel que $f(K) = J$. *(ENS Cachan 1995)*

---

7. Soit $f \in C^0(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+)$ telle que $\dfrac{f(x)}{x} \to \alpha < 1$ lorsque $x \to +\infty$. Montrer que f admet un point fixe.

---

8. **Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue telle que $|f(x)| \to +\infty$ en $+\infty$. Montrer que soit $f(x) \to +\infty$, soit $f(x) \to -\infty$. Montrer par un exemple que cela n'est plus vrai si f n'est pas supposée continue.

---

9. ****Théorème de Levy (1934)** Soit $f \in C^0([0,1])$ telle que $f(0) = f(1)$.
   (a) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $x \in [0,1]$ tel que $f\left(x + \dfrac{1}{p}\right) = f(x)$.
   (b) ***Le résultat subsiste-il si l'on remplace $1/p$ par $\lambda \in]0,1[$ avec $1/\lambda \notin \mathbb{N}$?
   (c) Un candidat à l'X, peu entrainé à vrai dire, effectue le 2000m en dix minutes. Montrer qu'il existe un intervalle de 5 minutes pendant lequel le candidat parcourt 1000m.

---

10. ***Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, qui admet un maximum local et un minimum local. Montrer qu'il existe $a \neq b$ tels que $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) = \dfrac{f(a)+f(b)}{2}$.

---

11. **Existe-il une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $f(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$?

---

12. **Exhiber une fonction vérifiant le théorème des valeurs intermédiaires mais non continue.

---

13. ***Soient f, g deux applications continues de $[0,1]$ dans lui même telles que $f \circ g = g \circ f$. Montrer qu'il existe $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = g(x)$. Le résultat demeure-t-il si l'on remplace $[0,1]$ par $\mathbb{R}$?

---

14. ***Soit $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ non constante. Montrer qu'il existe deux réels $a < b$ tels que pour tout $c \in]a, b[$, $f(c) \neq f(a)$ et $f(c) \neq f(b)$. *(ENS Ulm)*