Le jeu de Nim

On dispose d'un certains nombre d'allumettes regroupées en différents tas. Deux joueurs A et B doivent alternativement choisir l'un des tas et y prendre au moins une allumette (éventuellement tous le tas). Le gagnant est celui qui prend la dernière allumette. Le joueur A commence. La disposition initiale des allumettes est dite A-gagnante, si en jouant judicieusement A est gagnant quels que soient les coups de B. Elle est dite B-gagnante sinon.

1. Etudier la disposition formée de 2 tas contenant chacun 2 allumettes.

2. On définit une loi de composition sur $\mathbb{N}$, notée $\oplus$, de la manière suivante : pour n, m deux entiers, qui s'écrivent en base 2, $n = a_0 + 2a_1 + ... + 2^p a_p$ et $m = b_0 + 2b_1 + ... + 2^p b_p$ (on prend le même p quitte à rajouter des 0), on pose $n \oplus m = \sum_{k=0}^{p} u_k 2^k$ où u_k est égal à 0 si $a_k = b_k$ et est égal à 1 sinon.

   (a) Montrer que $\oplus$ est commutative, associative. Admet-elle un élément neutre ?

   (b) Calculer $n \oplus n$. Qu'en déduire ?

   (c) Soit $n_1, n_2, ..., n_p$ des entiers et $S = n_1 \oplus n_2 \oplus ... \oplus n_p$. A quelle condition a-t-on $S = 0$? Montrer que si $S \neq 0$, on peut trouver un indice i tel que $S \oplus n_i < n_i$.

   On revient au jeu de Nim. Soit p le nombre de tas dans la disposition initiale des allumettes. Au cours du jeu une position est donnée par un p-uplet $(n_1, ..., n_p)$ où n_i est le nombre d'allumettes restantes dans le i-ième tas. La position est dite de type I si $n_1 \oplus n_2 \oplus ... \oplus n_p = 0$ et de type II sinon.

3. (a) Montrer qu'un coup transforme une position de type I en une position de type II.

   (b) Quel est le type de la position que récupère le joueur gagnant au moment où il enlève la dernière allumette ?

   (c) Montrer que si on a une position de type II, il existe un coup permettant d'obtenir une position de type I.

   (d) Le joueur A a-t-il une stratégie gagnante ? Si oui, laquelle ? On discutera en fonction du type de la position initiale.

4. Vous vous retrouvez face aux positions suivantes. Est-elle gagnante pour vous ? Si, oui quel coup jouez vous ? $(1, 3, 9, 27)$; $(3, 5, 7, 8, 11)$; $(1, 2n + 1, 2n + 2)$.

5. Le jeu de Northcott. Il se joue entre deux joueurs sur un échiquer carré. Chaque joueur possède un unique pion sur chaque colonne. Chaque joueur à son tour choisit un de ses pions et peut le déplacer sur la colonne vers l'avant ou vers l'arrière d'autant de cases qu'il veut. Il est toutefois interdit de passer au-dessus du pion de l'adversaire qui se trouve sur la même colonne. Le but du jeu est d'immobiliser l'adversaire. Montrer, en utilisant le jeu de Nim, que l'un des deux joueurs peut toujours forcer le gain. Expliquer comment. Par exemple dans la position suivante, les blancs doivent jouer. Peuvent-ils forcer le gain ? Si oui, quel coup jouer ?